

SYLLABUS COLLEGE

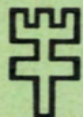
Inleiding Bedrijfseconometrie

VAN

PROF. IR. W. MONHEMIUS

Samengesteld door de groep Bedrijfseconometrie

Derde uitgave - Najaar 1968



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 111
PRIJS f 5,--

INHOUD

Pag.

VOORWOORD.

Het doel van college en syllabus.

I INLEIDING TOT OPERATIONELE RESEARCH.

1. Probleemstelling. Waartoe is OR nodig?	2
2. Beslissingen bij bedrijfsbesturing.	13
3. Beslissingen in het licht van een systeemconceptie.	29
4. Plaats van OR tussen andere vakgebieden. Overzicht toepassingsgebieden.	38
5. Werkwijze en kenmerken van OR.	45
Vraagstukken.	60
Literatuuropgave.	63

II METHODEN EN RESULTATEN VAN OR.

BESTE OPLOSSING BIJ TOEWIJZINGSPROBLEMEN. 66

6. Toepassingsgebieden lineaire programmering.	66
7. Rekenmethodes van LP.	75
8. Zeer beknopt overzicht van het gehele gebied van de wiskundige programmering.	92
Literatuuropgave.	94

III METHODEN EN RESULTATEN VAN OR.

ONDERZOEK EN BEHEERSING VAN PROCESSEN. 96

9. Karakterisering van afname en produktie.	96
10. Oorzaken van wachttijden, functie van voorraden.	98
11. Verklaring, berekening en bestrijding van loket- wachttijden.	102
Literatuuropgave.	119
12. Netwerkmethoden voor projektplanning.	123
Literatuuropgave.	143
13. Bestelsystemen	145
14. Berekenen en verlagen van voorraden.	163
Literatuuropgave.	176
15. Systeemsimulatie.	178
Literatuuropgave.	193
16. Industriële dynamica.	194
Literatuuropgave.	199

APPENDIX.

- A. Enige definities uit de waarschijnlijkheidsrekening.
- B. Afleiding van de binominale verdeling.
- C. Afleiding van de Poissonverdeling.
- D. Verband tussen Poissonverdeling en negatief exponentiële verdeling.
- E. De gammaverdeling.
- F. De afname per periode.
- G. De lognormale verdeling.
- H. Enige resultaten van de wachttijdtheorie.
- I. De regel van Magee.
- Bibliographie appendix.

VOORWOORD.

Het doel van college, syllabus en practicum.

Deze syllabus dient als hulpmiddel bij de bestudering van de beide vakken:

- "inleiding bedrijfseconometrie"
- "inleiding bedrijfseconometrie voor BDK".

Het doel van de studie in deze vakken is, de student een eerste overzicht te geven van het nut, het toepassingsgebied en de werkwijze van operationele research in industriële bedrijven.

Deze studie dient voor bedrijfskundige studenten als een eerste inleiding tot een gebied, dat later dieper en door sommigen veel dieper wordt bestudeerd. Voor anderen wil dit college als keuzevak een afgeronde inleiding tot de operationele research in de industrie geven. Daartoe wordt per onderwerp zo goed mogelijk nagegaan:

- wat is het verdere uitzicht, vanaf het punt dat in de syllabus bereikt is
- wat is het praktisch nut van de besproken methodes en resultaten.

Het doel van de syllabus is, de stof te beschrijven, die de grondslag is van dit college.

Het doel van het college in engere zin, als luistercollege van twee semesteruren gedurende een semester opgezet, is:

- de syllabus te verduidelijken en toe te lichten, o.a. met numerieke voorbeelden
- enkele voorbeelden van toepassingen te behandelen in aanvulling op de syllabus.

Het doel van de appendix van de syllabus is, enkele vroeger reeds behandelde zaken op te frissen en enkele afleidingen te geven, die in het college ter sprake komen.

Bij dit college hoort een praktikum van vier middagen. De bedoeling van dit praktikum is, voor BDK-studenten: op heel kleine schaal OR te bedrijven en daarover te rapporteren. Voor de andere: een oefening in het gebruik van enkele van de bestudeerde modellen.

De examenstof is:

- de stof in de syllabus beschreven (voor de niet-bedrijfskundigen: behoudens enkele nader aan te duiden paragrafen).
- de literatuur, die op het college wordt uitgereikt
- voor de bedrijfskundigen bovendien: een boek, waarvan de titel elk jaar zal worden bekend gemaakt.

De syllabus mag als regel bij het tentamen worden meegenomen en gebruikt.

Uit het voorgaande volgt, dat men niet mag verwachten in de syllabus alle onderwerpen, die besproken worden, zo volledig en duidelijk behandeld te vinden dat een bestudering van alleen de syllabus voldoende is. Nadere uitleg zal soms nodig zijn; deze kan verschaft worden door collegebezoek of literatuurstudie.

Een vraagstukkenboek met uitgewerkte antwoorden is in voorbereiding.

Gaarne brengen wij op deze plaats dank aan de velen, die commentaar gaven op de voorgaande versie van deze syllabus, waardoor deze derde uitgave hopelijk op vele punten verbeterd is ten opzichte van de tweede.

I. INLEIDING TOT OPERATIONELE RESEARCH.

- 2

1. Probleemstelling. Waartoe is OR nodig?

Dit hoofdstuk is verdeeld in de volgende paragrafen, die elk een aantal optredende problemen signaleren in verschillende typen produktie:

- produktie van grote aantallen in grote series (intermitterend)
- produktie van grote aantallen in continu-montage
- hoogovens en staalfabrieken
- uitvoering van grote projekten

De bedoeling van dit hoofdstuk is, eerst de sfeer te schilderen, waarin problemen ontstaan en de aard van enkele van die problemen te beschrijven voordat in latere hoofdstukken wordt nagegaan hoe die problemen kunnen worden aangepakt en opgelost.

1.1. Intermitterende produktie; grote series.

Getoond wordt het produktieproces van gloeilampen of een soortgelijk proces.

De verschillende lamptypen verschillen in constructie, ze worden echter allen samengesteld uit dezelfde soorten onderdelen (d.i. altijd een lampvoet, altijd een spiraal) en doorlopen de diverse bewerkingen in dezelfde volgorde. Het produktieproces is sterk gemechaniseerd. Als regel maakt een bepaalde machine niet continu hetzelfde produkt, maar beurtelings series van verschillende produkten. Als regel beschikt een fabriek over een aantal parallel opgestelde machines.

Indien wij één montagemachine voor eindprodukten beschouwen, is voor elk van de daaraan toegewezen eindprodukten steeds weer de vraag:

- wanneer moet een nieuwe serie worden gemaakt?
- hoeveel stuks moet de serie bevatten?

- 3 -

Om deze beslissingen (vele in aantal!) goed te kunnen nemen, moet men de doelstellingen van de onderneming in het oog houden. Deze doelstellingen kunnen in de regel voor de fabriek op korte termijn als volgt vertaald worden:

a) functionele doelstelling: leveren van goederen en diensten, en wel:

- beloofde levertijd aanhouden
- gegarandeerde kwaliteit aanhouden
- rentabiliteit maximaliseren. (dit laatste punt, maximaliseren van de rentabiliteit van het geïnvesteerde kapitaal, kan bij een gelijkblijvende investering worden vervangen door:
minimaliseren van de kosten).

Tegen deze achtergrond bezien blijkt het belang van de vragen: - wanneer?
- hoeveel?

b) interne sociale doelstelling: nastreven arbeidsvoldoening voor medewerkers op alle niveau's.

Wanneer moet een serie geproduceerd worden?

Bij dit soort produktie wordt gewoonlijk op voorraad geproduceerd en uit voorraad geleverd.

Daarom kan gezegd worden:

te vroeg produceren betekent:

- meer voorraad eindprodukt
 - . meer ruimte nodig
 - . meer geïnvesteerd kapitaal
 - . meer risico (incourant, bederf etc.)

te laat produceren kan betekenen:

- buiten voorraad (dreigen te) raken
 - . te late leveringen ("backorders")
 - . deelleveringen
 - . spoedzendingen
 - . klachten, verlies van "goodwill"
 - . telefoongesprekken, telegrammen etc.

Wij hebben hier te maken met een voorraadprobleem. Dat het hele gebied van voorraadproblemen voor de industrie van groot belang is, blijkt wel als wij zien welk gedeelte van hun vermogen de diverse ondernemingen in voorraden van allerlei aard hebben geïnvesteerd. Ook de gevolgen van te laat leveren kunnen soms aanzienlijk zijn.

- 4 -

Hoeveel? Hoe groot moet de produktieserie zijn?

Een bepaalde jaaromzet (van een bepaald eindprodukt) kan worden geproduceerd in één grote produktieserie of in vele kleine series. Hier ligt een gebied van veel conflicten tussen:

- de produktieafdeling (grote series betekenen weinig omstellen)
- de financiële afdeling (grote series betekenen gewoonlijk hoge voorraden eindprodukt)
- de commerciële afdeling

Een evenwicht tussen diverse categorieën beïnvloedbare kosten (voorraadkosten, omstelkosten, aanloopkosten) moet worden gevonden. Het bepalen van bijv. omstelkosten is soms verre van eenvoudig.

De probleemstelling is tot nu toe beperkt tot twee vragen per eindprodukt: "wanneer?" en "hoeveel?".

De werkelijke probleemstelling is nog uitgebreider:

- welk systeem voor voorraadbeheersing en produktieplanning moet worden gebruikt?
- hoe moeten produkten aan machines worden toegewezen?
- hoeveel uren per week moet elk van de machines draaien?
- en tenslotte is er het probleem: hoe zorgen we ervoor dat op het juiste moment de juiste onderdelen in de juiste hoeveelheid ter beschikking staan (en ook dat tegen minimale kosten)?

Eén van de overige problemen in dit type produktie wordt gevormd door de voorraadbeheersing van de reserve-onderdelen voor de machines. Wij hebben daar te maken met een zeer groot assortiment artikelen, elk met een lage jaarlijkse afname. De totale investering in de voorraad kan toch aanzienlijk zijn, onder andere doordat de levertijden van deze onderdelen soms hoog zijn. De bedrijfsleiding moet een norm voor de hoogte van deze voorraden opstellen; maar hoe? Het is natuurlijk onmogelijk in detail al die voorraadposten te gaan bestuderen; maar het is ook lastig, algemeen geldige regels te geven.

Over de nu aangeduide soorten problemen gaat dit college. Getoond zal worden hoe kwantitatieve methodes ons langzamerhand houvast geven bij de aanpak ervan.

1.2. Continu montage.

Getoond wordt het produktieproces van elektronenbuizen of een soortgelijk proces. Er zijn betrekkelijk weinig verschillende types eindprodukt; zij kunnen onderling echter aanmerkelijk verschillen in constructie. Montage vindt plaats met de hand of in sommige gevallen op een lijnautomaat. In vele gevallen produceert een groep monteuses (of een lijnautomaat) maanden aaneen continu hetzelfde eindprodukt. Bij deze continu montage bestaan ten aanzien van het eindprodukt niet de vragen: "wanneer?" en "hoeveel?". Hier is het probleem: "hoeveel per maand?". Het niveau van de afname zal namelijk niet constant zijn van maand tot maand; het is echter niet economisch om fluctuaties met een korte periode te volgen met de produktie, omdat veranderen van produktieniveau gewoonlijk duur is (aanleerkosten). Aan de andere kant willen we fluctuaties met een lange periode niet opvangen met een buffervoorraad, die dan te kostbaar zou worden. Ook hier is het belang van een betrouwbare voorspelling van de vraag wel duidelijk. Het geschilderde probleem van de niveaubepaling wordt meer gecompliceerd, indien een onderneming in diverse landen montagefabrieken heeft. De probleemstelling voor de verschillende fabrieken mag dan niet los van elkaar gezien worden: "hoeveel per maand, en in welke fabriek?". Ook ten aanzien van de onderdelenproduktie ontstaat dan een toewijzingsprobleem: in welke fabriek moet elk van de onderdelen worden gemaakt? Bij die keuze speelt ook de omvang van de jaarserie en de totale serie een rol, o.a. in verband met gereedschapskosten.

Een elektronenbuis heeft meer onderdelen dan een lamp. Voor de meeste van die onderdelen geldt wel de vraag: "wanneer" en "hoeveel". Dit probleem neemt sterk in omvang toe voor eindprodukten als radio's, TV toestellen, personenauto's, vliegtuigen.

Een enorme hoeveelheid administratieve arbeid is nodig:

- om te zorgen, dat er geen produktieplannen gemaakt worden, die niet passen binnen de aanwezige capaciteit
- om te zorgen dat de onderdelen op tijd geproduceerd worden
- om te zorgen dat de onderdelen op het juiste moment in de juiste fabriek aanwezig zijn.

Daarbij spreken we dan nog niet eens over de noodzaak, dit alles tegen minimale kosten te doen. Een dergelijke hoeveelheid administratief werk, met de hand uitgevoerd, dreigt voor de leiding onbestuurbaar te worden. Dit argument leidt in vele gevallen tot gebruik van computers; daarbij gelden ook andere argumenten:

- versnelling van het werk
- kostenverlaging
- mogelijkheid om meer ingewikkelde berekeningen uit te voeren.

Het is duidelijk, dat een computer pas kan worden ingeschakeld, als een bepaalde systematiek is ontworpen, als beslissingsvoorschriften bestaan.

Ter illustratie van het bovenstaande kan nog worden gewezen op de verliezen, die tengevolge van onbetrouwbare levertijden soms ontstaan.

In het kader van dit college blijven uiteraard vele aspecten van de aangeduide problemen onbesproken. Op het bestaan van die aspecten moet hier toch wel de aandacht worden gevestigd. Bij het ontwerp van een montageband bestaan bijv. de volgende vragen:

Montageband:

Stel dat per dag 1500 apparaten geleverd moeten worden. Ieder apparaat kost aan tijd 90 minuten. Er zijn 9 werkuren per dag. Er zijn dus $\frac{1500 \times 1,5}{9}$ mensen nodig (≈ 250).

- 7 -

Bij de organisatie van dit produktieproces doen zich een aantal vragen voor, o.a.:

1. Hoe structureren wij dit werk?

Twee extreme oplossingen zijn denkbaar:

- alle mensen aan één lange band; ieder apparaat komt langs elke man; iedereen verricht ongeveer 1/250 gedeelte van het werk aan ieder apparaat. De werkcyclus is ongeveer 90/250 minuut (in eerste heel ruwe benadering)
- elk apparaat wordt telkens door één man geheel afgewerkt. Er zijn dan 250 mensen parallel geschakeld; werkcyclus 90 minuten.

Er zijn allerlei tussenvormen denkbaar, bv. parallel 50 groepjes van elk 5 mensen. Bij de keuze tussen deze alternatieven spelen allerlei overwegingen een rol, zoals:

- het effect van grotere routinevorming bij een kortere werkcyclus
- de mogelijkheid tot een hogere mechanisatiegraad bij verdere arbeidssplitsing
- het beschikbare type mensen
- de invloed van de werkcyclus op de arbeidsvoldoening
- bij een gegeven assortiment produkten zal men bij een lange band waarschijnlijk meer keren moeten omstellen van één type produkt naar een ander.
- benodigde hoeveelheid gereedschap
- bij een lange band is het effect "zwakste schakel" groter

2. Indien 1 produktiegroep of -band diverse typen apparaten moet fabriceren, wat is dan de optimale produktieserie per type?

3. In welke mate zijn buffervoorraden gewenst tussen opeenvolgende werkplekken?

4. Welke ruimtelijke opstelling wordt gekozen voor een gegeven band; zetten wij alle mensen in één lange lijnopstelling? Worden er subgroepjes gevormd? En ook: langs welke weg komen wij hier tot een beslissing? Wie spelen welke rol in het besluitvormingsproces?

5. Hoe moet de belasting voor de verschillende werkplekken aan een produktieband worden uitgebalanceerd?

6. Welk beloningssysteem moet worden toegepast?

7. Wie krijgt welke informatie, in welke vorm, met welke frequentie, met welke vertraging?

- 8 -

8. Hoe wordt de werkplek ingedeeld?
9. Hoeveel meetapparaten moeten in reserve worden gehouden om storingen in de gebruikte apparatuur te kunnen opvangen?

Zo ontstaan bij de organisatie en leiding van een produktie-proces allerlei problemen en deel-problemen met velerlei aspecten: een interdisciplinaire aanpak is veelal gewenst. Bij de hierboven genoemde vragen moeten de organisatieleer, de produktie-techniek, de psychologie, de sociologie en de economie te hulp worden geroepen naast de operationele research (O.R.) Hieruit resulteert voor OR de waarschuwing, gegevens niet te gauw als "onbeïnvloedbaar" te beschouwen. In de OR-literatuur vindt men bv. veelal aanleerverliezen als een vast gegeven ingevoerd; de sociaal-psycholoog echter bestudeert dit soort verliezen (per keer omstellen) als een beïnvloedbare variabele; en zo wenst de produktietechniek in het kader van de "Gruppentechnologie" de technische omstelverliezen juist sterk te verkleinen.

1.3. Hoogovens en staalfabrieken.

Getoond wordt de materiaalstroom langs de verschillende mogelijke bewerkingen, leidend tot de verschillende soorten eind-produkt. Een montageproces is niet aanwezig. In vele gevallen levert men niet uit voorraad, maar op order, zodat de klanten-order doordringt in het bedrijf zelf. Na de iets meer uitvoerige behandeling in de vorige paragrafen zullen enkele problemen hier puntsgewijs worden aangeduid.

Het erts wordt aangevoerd met schepen, die in de haven worden gelost. Binnenkomst en bediening zijn nooit volledig op elkaar af te stemmen, daardoor ontstaan wachttijden voor de schepen en voor de installaties. Vragen zijn o.a.: welke capaciteit moet de haven hebben? Welk type apparatuur is nodig en hoe wordt die opgesteld?

- 9 -

Indien een bepaalde soort ruwijzer nodig is, kunnen verschillende combinaties van beschikbare ertsen tot het gewenste doel leiden; welke combinatie is de beste? Ook het latere gebruik van afval en schrot kan daarbij een rol spelen. Indien het bedrijf een cementfabriek heeft, moet ook het bijproduct, de slak, aan bepaalde eisen voldoen.

Indien in een bedrijf een aantal convertors staat opgesteld, kan het voorkomen dat twee ervan tegelijkertijd bediening vragen. Ook hier een wachttijdprobleem. Op een andere tijdschaal treedt hetzelfde op als een dergelijke installatie, die gerepareerd moet worden, moet wachten op de onderhoudsploeg. Bij de uitvoering van dat onderhoud is een probleem, het werk van de verschillende mensen zo goed te plannen, dat de oven zo kort mogelijk buiten bedrijf is. Bedenk, wat 1% verlies aan "bottle-neck" capaciteiten betekent aan gederfde winst!

Eén van de grootste problemen is de onderlinge afstemming van het werk bij de hoogovens, de staalfabrieken en de walserijen. Maken de hoogovens tijdelijk meer, dan de staalovens kunnen verwerken, dan zijn alternatieven o.a. vertraging van het proces of broodjes gieten. Als staalblokken voor de walsen lang moeten wachten, kost dat warmte. Welke is de beste gemiddelde inhoud voor een converter, gezien de spreiding in inhoud van de converter en de spreiding in de capaciteit van de blokkentrein?

Indien gewalste staven moeten worden geleverd met een bepaalde lengte, op welke overmaat moet dan gemiddeld voor die lengte worden gemikt? In het algemeen: welke overmaat moet voor het walsen aanwezig zijn om na het walsen de gewenste maat (maten) er uit te kunnen krijgen? Afwegen kosten overmaat tegen kosten van afkeur (indien bottleneck: capaciteitsverlies).

Hoe moeten klantenorders (orderplaten) worden gecombineerd tot walsplaten? Hoe moeten plakken worden gecombineerd tot blokken?

Wat is de optimale hoeveelheid reservepersoneel?
Wat is de beste keuze van het assortiment, gegeven capaciteits- en marktrestricties?

Bij hoogovens of staalfabrieken eerder dan bij wachttijdbepaling van orders op een kantoor leert de OR-man de woorden van LATHROP naar waarde schatten:

"It takes real guts to do front-line operations research, to dare to grapple with the writhing and thorny reality of a going, complex operation". "A front-line operation will not stand still under laboratory control while we look at it, but sweeps past like a herd of buffaloes threatening to engulf us as it goes. We may reach out to snip off a microcosm for study as it thunders by, but too often its vivid colors fade swiftly and it lies lifeless in our hands".*

1.4. Uitvoering van grote projecten.

Getoond worden het ontwerpen en het bouwen van een groot schip of een soortgelijk proces.

Technisch en sociaal-psychologisch is er een groot verschil tussen dit proces en bijv. het proces uit paragraaf 1.1. Hier één enkel werkstuk, dat tot de verbeelding spreekt, in het centrum van de belangstelling. De vakman speelt relatief een grotere rol.

Doordat het project uit vele karweien en deelkarweien bestaat en doordat zoveel verschillende capaciteitsgroepen en toeleveranciers bij het project zijn betrokken, ontstaat een geweldig probleem van afstemming. Eerste eis

* (J.B. Lathrop- "Operations research looks to science"
Operations research vol 7 nr 4.

is ook hier: bestuurbaarheid, beheersing
en dus: voorspelbaarheid.

Daarna komt de eis, te streven naar een optimale gang
van zaken.

Op welk moment is de scheepsmotor nodig? Wanneer moet hij
gereed zijn? Welke maatregelen kunnen in geval van ver-
traging nut hebben? Houdt men toezicht op de algehele
voortgang?

Bij dit soort produktieproces ontstaan eerder wacht-
problemen dan voorraadproblemen. Bijvoorbeeld: Er wordt
gewacht, omdat de motor 2 weken te laat komt.

Er wordt gewacht op de werfkraan, die nog met een ander
karwei bezig is.

Een grote as ligt op zijn beurt te wachten bij de spie-
baanfreesbank, die nog door een vorig werkstuk bezet is.
Hoe kan al dat wachten worden verminderd en loont het de
moeite dat te doen? Hoe groot moeten bijv. de verschil-
lende capaciteiten zijn en welke voorrangsregels moeten
worden gebruikt?

Evenals bij de voorraadproblemen ontmoeten wij hier schijn-
bare tegenstelling. Een korte doorlooptijd voor het
projekt is soms strijdig met een hoge bezettingsgraad
van de apparatuur. Een verkorting van de bouwtijd van
een schip met 1 maand levert geweldige financiële voor-
delen op; ook de nadelen van een eventuele lagere be-
zetting moeten echter worden gezien.

Zoals reeds in paragraaf 1.1 werd opgemerkt, kan met
behulp van kwantitatieve methodes tegenwoordig een aan-
tal van de geschetste problemen met succes benaderd wor-
den; computers bieden daarbij vaak goede hulp. Een van
de effecten is daarbij zoals STAFFORD BEER * stelt:

* S. Beer- "The scope for operational research in indus-
try" 1956 George Bray Memorial Lecture.

- 12 -

"In this arena almost any question is likely to become a focus of opinion rather than knowledge, of prejudice rather than fact, of passion rather than logic. Operational research works to create a Still Centre in this turmoil. Our aim is just this: to lift controversy out of the arena of controversy".

2. Beslissingen bij bedrijfsbesturing.

In het kader van de bedrijfsvoering worden in elk bedrijf dagelijks vele beslissingen genomen. De bedoeling van dit hoofdstuk is, het beslissingsproces te analyseren, de beslissingen in categorieën te onderscheiden en daarna enkele criteria te beschrijven op grond waarvan men beslissingen kan nemen. Wij willen hier niet ingaan op de procedures die in een bedrijf nodig zijn om beslissingen te nemen.

Het voorbereiden en nemen van beslissingen is een wezenlijk bestanddeel van het leiden van een bedrijf; het scheppen van de juiste sfeer en tot uitvoering doen brengen van de genomen besluiten is echter niet minder belangrijk ("getting things done"). De bedrijfseconometrie beperkt zich tot de kwantitatieve problemen die van belang zijn bij beslissingen ten aanzien van leiding en organisatie van bedrijven.

2.1. Het beslissingsproces.

Sittig (1964) geeft het bijgaande schema van besluitvorming, dan ten dele op Bross (1953) geïnspireerd (zie figuur 1). Hij schrijft *) : "men handelt bewust, opzettelijk en doelmatig om tevoren expliciet geformuleerde doelstellingen te bereiken. Men gaat na, welke maatregelen in aanmerking komen en welke consequenties zij zullen hebben (analytische fase). Daar de berekende theoretische consequenties niet identiek zullen zijn met de later in de praktijk optredende consequenties als de betreffende maatregel inderdaad wordt doorgevoerd, zijn de theoretische consequenties in het schema als het ware verschoven getekend ten opzichte van de werkelijke consequenties.

*) Deze uitspraak is normatief en heeft niet tot doel, alle werkelijke situaties te beschrijven.

Het is nodig, dat men over een methode beschikt om, gebruik makend van de resultaten van de analyse, een goede beslissing te nemen, d.w.z. de kwalitatief en kwantitatief meest doeltreffende maatregelen te kiezen (synthetische fase)".

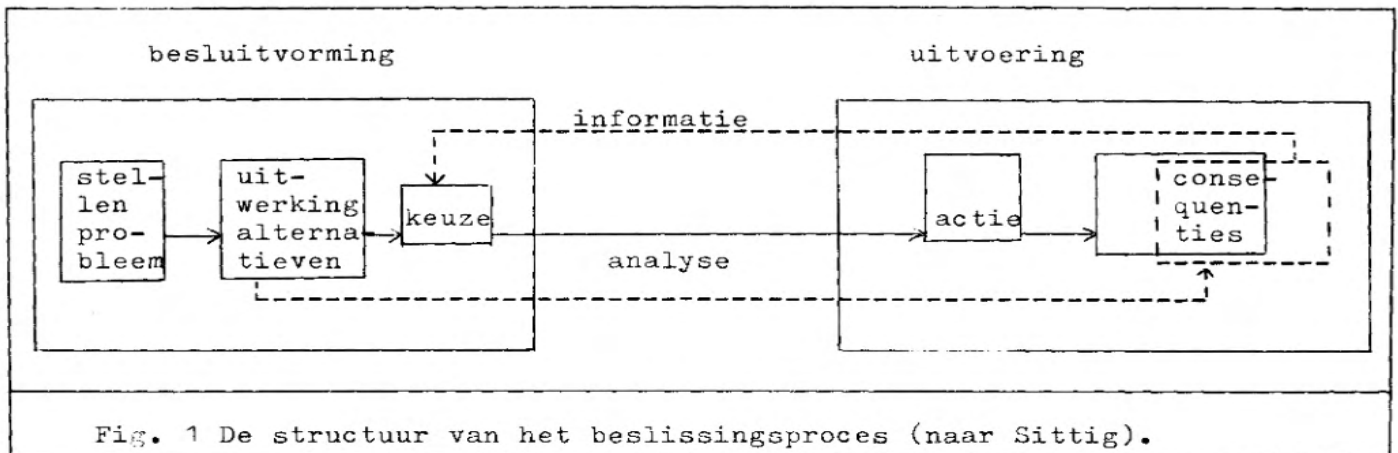


Fig. 1 De structuur van het beslissingsproces (naar Sittig).

Er zal steeds een objektfunctie zijn, die men minimaliseert of maximaliseert. Men wil zoveel mogelijk huizen bouwen of zo weinig mogelijk kosten maken, men wil een zo hoog mogelijk rendement van het geïnvesteerde kapitaal hebben of zo weinig mogelijk risico lopen. De objektfunctie moet enkelvoudig zijn, men moet niet als doelstelling kiezen "zoveel mogelijk produceren tegen zo gering mogelijke kosten"; men verwacht dan objektfunctie en restricties. Ook de restricties, waaraan men bij de keuze onderworpen is, dienen expliciet te worden geformuleerd.

Bruikbare doelstellingen zouden wel zijn:

- een gegeven aantal produkten van gegeven kwaliteit produceren tegen zo laag mogelijke kosten.
- tegen gegeven kosten een zo groot mogelijk aantal produkten maken van gegeven kwaliteit.

Uit het schema van figuur 1 wordt ook duidelijk, welke rollen in het beslissingsproces bestaan. Degene(n) die de doelstellingen formuleert (-eren) hoeft in het geheel niet

- 15 -

dezelfde te zijn als degene(n) die de alternatieven formuleert(-eren); nog weer anderen wellicht zijn belast met de taak, de consequenties van de alternatieven te analyseren. Uit het voorgaande blijkt ook, dat de "beslisser" (dat is degene, die uiteindelijk de keuze moet doen) in het algemeen niet aan elk van zijn adviseurs de vraag moet stellen: "wat vindt U, dat ik moet kiezen". Veel doelmatiger is de vraag van het type: "wat zijn volgens U de consequenties van resp. de alternatieven A, B en C?"

2.2. Voorbeeld.

Het voorbeeld van de berekening van de optimale serie wordt hierna gebruikt ter toelichting van enkele begrippen en gedachten, die in het voorgaande gebruikt zijn; de beschouwde situatie is daarom sterk geschematiseerd, in deel III volgt een nadere uitwerking.

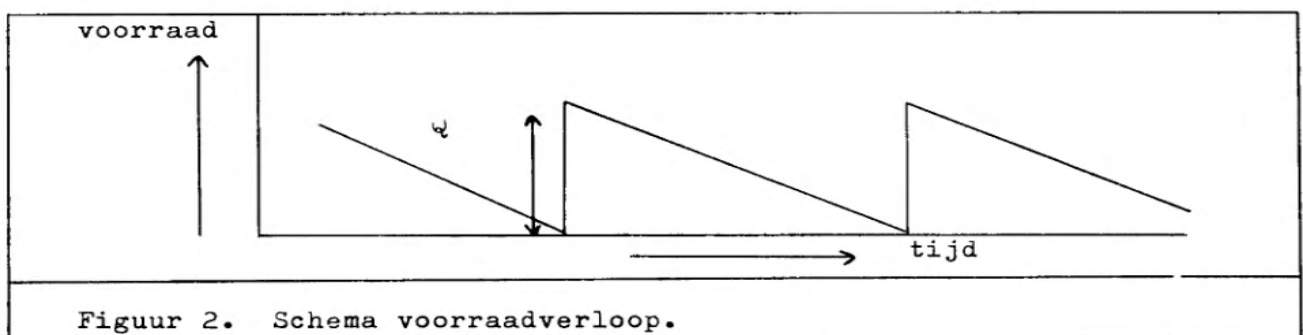
In een montagebedrijf heeft men bepaalde bevestigingsonderdelen nodig. Men houdt deze onderdelen zelf in voorraad en plaatst periodiek een aanvullingsbestelling van q stuks.

Keuzeprobleem: hoe groot moet q zijn?

Objektfunctie C: de som van bestelkosten en voorraadkosten per jaar.

Alternatieven: alle q -waarden tussen $q = 1$ en $q = +\infty$

Er kan nu een wiskundig model worden opgesteld, dat aangeeft wat voor elke waarde van q de resulterende waarde van de objektfunctie is:



F = de kosten van een bestelling (bv. f 5,-).

K = de kosten per stuk (bv. f 0,03).

αK = de kosten van het in voorraad hebben van één stuk gedurende 1 jaar

[$\alpha = 0,1$ wil zeggen dat de voorraadkosten 10% van de aanschaf-

kosten bedragen.

B.v. $\alpha = 0,05$ (rente) + $0,04$ (ruimte) + $0,01$ (risico).]

D = afname per jaar in aantal stuks (bv. 100.000).

q = de bestelserie.

Het aantal bestellingen per jaar is dus $\frac{D}{q}$.

De gemiddelde voorraad is $\frac{q}{2}$ stuks (fig. 2)

Onze analyse leidt nu tot de volgende "informatie", die voor elke alternatieve actie (d.i. elke waarde van q) de kostenconsequentie geeft:

$$C = \frac{D}{q} \cdot F + \frac{q}{2} \alpha K + DK.$$

DK is een grootte, die we in dit geval niet zelf kunnen beïnvloeden. Door met de q te manipuleren kunnen we de beïnvloedbare kosten variëren. Nu volgt de keuze, de beslissing in engere zin. In het besproken voorbeeld wordt de differentiaalrekening te hulp geroepen:

$$\frac{dC}{dq} = 0; \quad \frac{-DF}{q^2} + \frac{\alpha K}{2} = 0; \quad q^* \text{ (optimale serie)} = \sqrt{\frac{2DF}{\alpha K}}$$

Deze uitdrukking staat bekend als de formule van Camp (1922).

Met de aangenomen waarden wordt dus $q^* = \sqrt{\frac{2 \times 100.000 \times 5}{0,1 \times 0,03}} = 18200$

Voor praktische doeleinden zal wel worden afgerond op 20.000.

Wij moeten nu 5 maal per jaar bestellen.

In dit bovenstaande voorbeeld komt geen restrictie voor. Er zou een restrictie ontstaan, als bv. de beschikbare magazijnruimte beperkt zou zijn.

2.3. Soorten beslissingen.

Op verschillende manieren kunnen de beslissingen, zoals die in de bedrijfsvoering voorkomen, worden gerubriceerd.

2.3.1. Unieke en routinebeslissingen.

unieke beslissingen

Het gaat hier om situaties, waarin één keer een beslissing moet worden genomen, die de verdere loop der gebeurtenissen gedurende lange tijd beïnvloedt en waarop men niet kan terugkomen; wij denken hier aan gewichtige beslissingen, die in het leven van een persoon of een bedrijf maar éénmaal of hoogstens enkele malen voorkomen.

Voorbeelden:

- keuze van een huwelijkspartner
- fusie van bedrijven
- het doen van een zeer grote investering

Voor de unieke beslissingen in een bedrijf neemt men, als er tot aan het moment van beslissingen voldoende tijd is, veel tijd en aandacht. Met behulp van vele staffunctionarissen wordt de beslissing voorbereid en tenslotte wordt na uitvoerige overweging de beslissing genomen op hoog niveau (dat is althans de gewenste situatie).

routinebeslissingen

Het gaat hier om beslissingen, waarvan er dagelijks verschillende, soms zelfs zeer vele, moeten worden genomen. Als het resultaat van een enkele beslissing eens wat ongunstig uitvalt, is dat niet ernstig; het gaat ons om het totale resultaat van alle beslissingen.

Voorbeelden:

- bestellen van een voorraadaanvulling voor een bepaald onderdeel
- afkeuren van een aangeleverde partij onderdelen
- het besluit, een machine wat bij te stellen.

- 18 -

In vele gevallen probeert men op hoger niveau een voorschrift te maken, dat aangeeft:

- welke gevallen als normaal beschouwd kunnen worden en welke dus uitzonderingen zijn
- hoe in normale gevallen beslist moet worden. Deze beslissingsregels beslissen, hoe er beslist moet worden.

Voorbeeld: het bepalen van B en Q in een (B,Q) systeem (zie //)

2.3.2. Eenstaps- en meerstapsbeslissingen.

Er zijn beslissingen, die in één stap worden genomen.

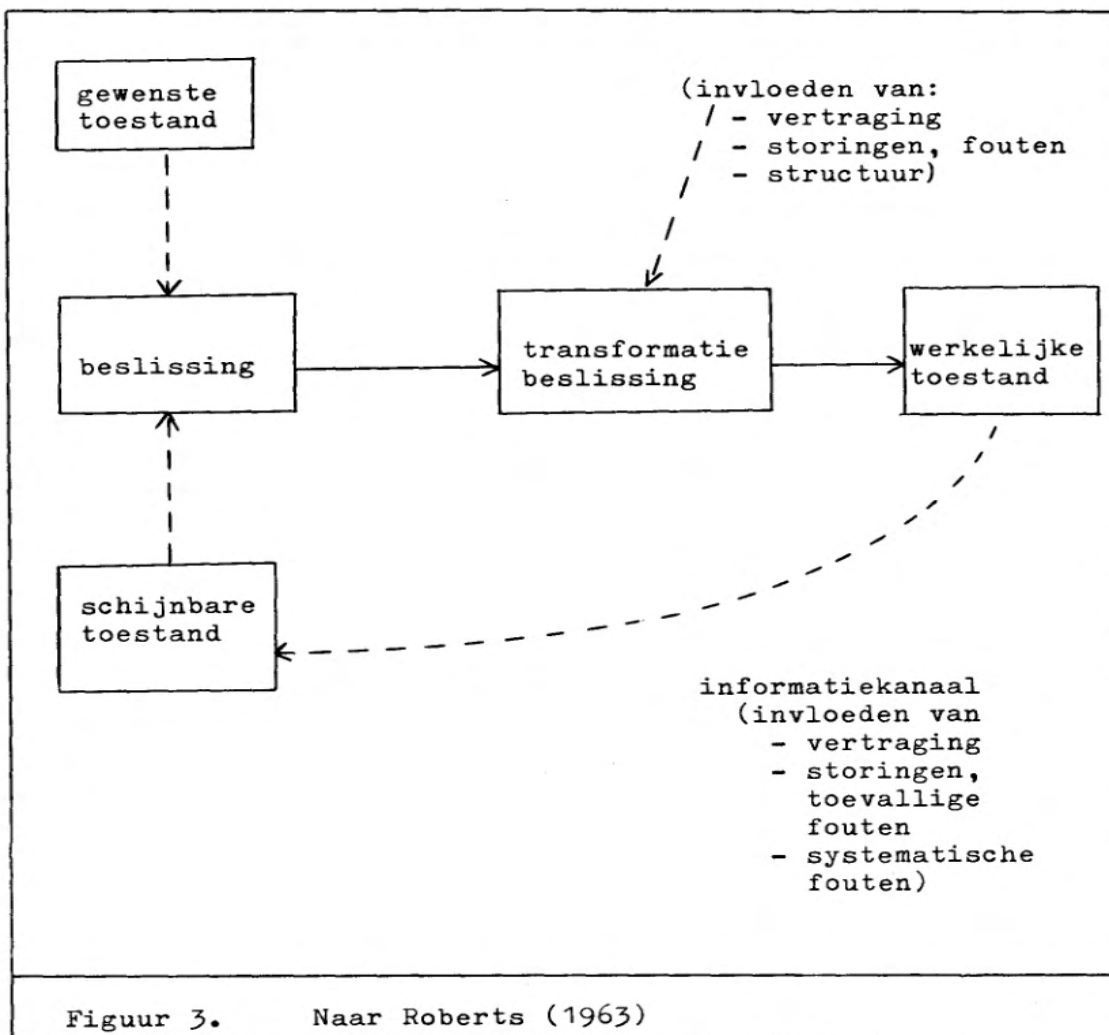
Er zijn ook beslissingen die in meer stappen worden genomen in die zin, dat op een aantal opeenvolgende momenten de mogelijkheid bestaat, te beslissen (voorbeeld: het vervangen van een oude machine door een nieuwe; nu al doen, of wachten tot de volgende maand?). resp. opnieuw te beslissen (bijv. zie fig. 3).

2.3.3. Beslissingen met of zonder terugkoppelingselement.

Terugkoppeling bestaat, indien in een gesloten keten (kring) de gemeten waarde van een geregelde grootheid wordt vergeleken met de ingestelde waarde en indien, afhankelijk van het verschil tussen beide, de geregelde grootheid zodanig wordt beïnvloed dat het verschil verkleind wordt (zie college "Automatisch Regelen").

Voorbeeld: bepalen produktieniveau gasfabriek
voor de volgende dag op grond van inhoud gas-
houder.

In figuur 3 wordt het schema gegeven voor een meerstapsbeslissing met een terugkoppelingselement.



Stel, gewenste inhoud gashouder is 100. Schijnbare inhoud is 90, verwachte afname is 80, beslissing: produceer 90, echter afname is 70, produktie is 83, voorraad wordt echt 103. Schijnbare voorraad kan van 103 verschillen door bv. een van de volgende oorzaken:

- afleesfout
- schrijffout

(bij een voorraad van artikelen in een magazijn kunnen ook de volgende oorzaken optreden:

- men vergeet het verbruik af te boeken
- men boekt af op de verkeerde kaart).

2.3.4. Onderscheid naar tegenspeler en voorspelbaarheid.

de natuur is de tegenspeler

Deze situatie kan men nog weer als volgt onderverdelen:

- a) - de consequenties van een bepaalde actie zijn volledig bekend; deterministisch (geval "certainty"). Als het aantal restricties groot is en het aantal te bepalen variabelen eveneens, komt men in de hoek van de mathematische programmering.
- b) - de kansverdeling van de mogelijke consequenties van een bepaalde actie zijn bekend (geval "risk"). Hier is de "statistical decision theory" van toepassing.
- c) - de mogelijke consequenties van een bepaalde actie zijn wel bekend, doch over hun kansverdeling is niets bekend ("uncertainty").

de tegenspeler is een kwaadaardige intelligente tegenstander

Hij probeert ons zoveel mogelijk afbreuk te doen. Hier is de speltheorie van toepassing. Wij gaan daarop in dit college niet nader in.

2.4. Beslissingscriteria.

Neem aan, dat de doelvariabele bekend is; het gaat ons bijv. om de jaarlijkse kosten. Nu kan toch nog de vraag rijzen, wat ons beslissingscriterium zal zijn; de keuze daarvan is soms bijzonder moeilijk en hangt af van het type van de beslissing. Een gangbaar criterium voor routineproblemen met de natuur als tegenspeler en in het geval "risk" is: kies de actie, waarvoor de mathematische verwachting van de doelvariabele het gunstigst is. Voor unieke beslissingen, die soms bovendien nog onder "uncertainty" genomen worden, worden wel eens andere criteria gebruikt.

Voorbeeld, ontleend aan Duckworth (1962).

Een bedrijfsleider moet ten aanzien van het juiste apparatuur kiezen tussen:

- onderhoud; kosten f 5.000,--
- algehele vernieuwing; kosten f 30.000,--

In beide gevallen is de fabrieksvakantie beschikbaar voor het karwei. Er is een kleine kans (geschat op 1%) dat het onderhoud niet helpt en alsnog vernieuwing nodig is, maar nu onder werktijd wat een schade van f 700.000,- oplevert, waarbij de arbeid van de vernieuwing zelf is inbegrepen. De matrix van keuzemogelijkheden en consequenties ziet er als volgt uit:

Kostentabel	Het onderhoud heeft	
	succes	geen succes
onderhoud	5.000	705.000
vernieuwing	30.000	30.000

Als mathematische verwachting van de kosten vinden wij
 voor onderhoud $f 4950 + f 7050 = f 12.000$
 voor vernieuwing $f 30.000$

De beslissing luidt volgens dit criterium: onderhoud.

Het criterium van Wald schrijft voor: bepaal voor elke actie de kosten, die in het (voor die actie) ongunstigste geval ontstaan; kies nu de actie die de beste waarde oplevert. Voor een actie tegen kwaadwillige tegenspelers is dit minimax-principe logisch; in andere gevallen is de keuze "pessimistisch". Voor het voorbeeld vinden we:

mogelijke actie	gevolg in ongunstigste geval
onderhoud	705.000
vernieuwing	30.000

De beslissing luidt nu: vernieuwing.

Het criterium van Savage schrijft dezelfde rekenwijze voor als Wald, echter toegepast op de getallen die de "spijt" aangeven. De "spijt" wordt bepaald als volgt: zoek per kolom eerst de gunstigste waarde, stel deze op nul. In elke kolom wordt voor elk vakje de spijt bepaald als verschil met de gunstigste waarde in die kolom. De zo verkregen getallen worden ook wel aangeduid als "opportunity costs".

mogelijke actie	onderhoud heeft:		spijt in ongunstigste geval
	succes	geen succes	
onderhoud	spijt 0	spijt 675.000*	
vernieuwing	spijt 25.000	spijt 0	

Beslissing luidt ook hier: vernieuwing.

De criteria van Wald en Savage zullen niet altijd dezelfde beslissing leveren. Zie bijv. onderstaand fictief voorbeeld.

		er komt oorlog	er komt geen oorlog
rente van geld, belegd in:	spaarbank	3,6 %	3,6 %
	aandelen	7,3 % 0	0 % 7,3

Een eigenaardigheid van het criterium van Savage is nog, dat de uitslag soms afhangt van het al dan niet aanwezig zijn van een alternatief, dat zelf nooit gekozen wordt. Ter toelichting moge het volgende voorbeeld dienen, ontleend aan Van der Veen.

* Dit is dus de spijt die men heeft als achteraf gebleken is, dat het onderhoud inderdaad geen succes heeft, terwijl men de actie "onderhoud" heeft gekozen.

- 23 -

geval 1			situaties, die mogelijk zijn		
			I	II	III
mogelijke acties	1		95	90	-10
	2		15	-110	190
	3		-100	-105	-9

geval 2 (zelfde als geval 1, doch 1 mogelijke actie meer					
			I	II	III
	1		95	90	-10
	2		15	-110	190
	3		-100	-105	-9
	4		100	-130	200

De getallen in de matrix geven het resultaat van de acties.
("Wat wilt U drinken, sherry of bier?"

"Dat hangt er van af; heeft U ook vermouthe? Als U wel vermouthe heeft, geef mij dan maar bier; als U geen vermouthe heeft, drink ik sherry".)

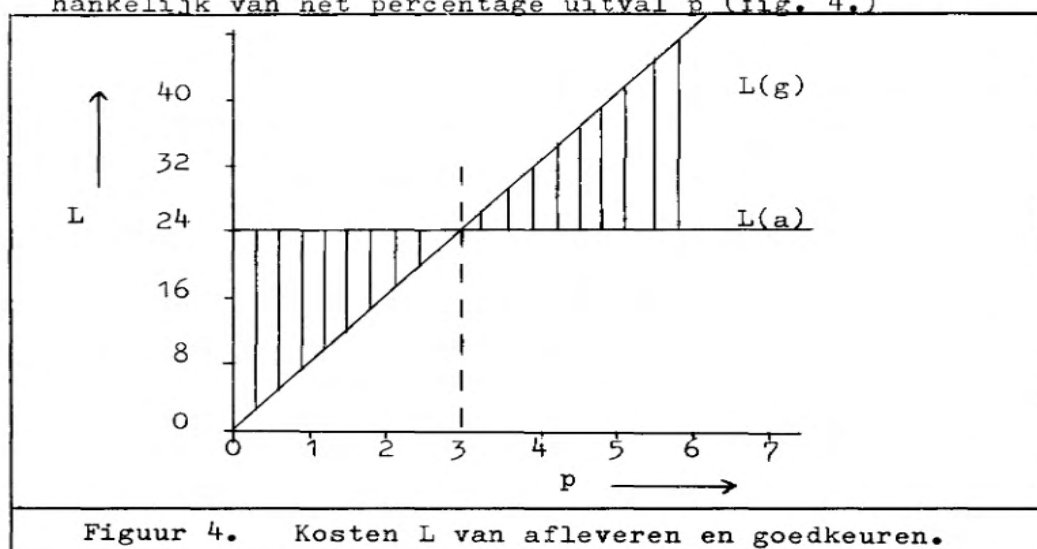
2.5. Het begrip "nut".

De wenselijkheid van een bepaalde consequentie kan lang niet altijd het beste in geld worden uitgedrukt. Voor een groot bedrijf is een winst van f 10.000 even gunstig als een verlies van f 10.00 ongunstig is. Voor een klein bedrijf echter kan een verlies van f 10.000 een ramp zijn, die het voortbestaan van het bedrijf in groot gevaar brengt. Wij werken dan liever met het begrip "nut" of "utility", daarbij is de vraag: wat is voor een bepaalde beslisser in een bepaalde uitgangssituatie het "nut" van x gulden meer of van x gulden minder.

2.6. Statistical decision theory; een voorbeeld.

Het volgende voorbeeld moge dienen om een eerste indruk te geven van de gedachtegang van de "statistical decision theory".

Ik zal U eerst de situatie beschrijven, die ik mij voorstel. Er komen in een bepaald bedrijf regelmatig partijen binnen van 800 stuks onderdelen. De kwaliteit van de aangeboden partij is de variabele, die in de decision theory genoemd wordt: "the state of nature", de toestand van de natuur *). Deze "state of nature", de uitval van een bepaalde partij, is gewoonlijk onbekend; om ons een indruk te vormen van de uitval kunnen wij "een experiment doen" m.a.w. een steekproef nemen. Ter vereenvoudiging neem ik aan, dat de grootte van een dergelijke steekproef reeds vaststaat en 90 stuks bedraagt. Verder neem ik aan, dat er slechts twee "acties" mogelijk zijn, waartussen ik moet kiezen: de partij goedkeuren en gebruiken bij de montage van eindprodukten ofwel de partij afkeuren en zelf 100% sorteren. Hoeveel stuks uitval zal ik nu in de steekproef van 90 toestaan alvorens af te keuren? De gevolgen van beide acties zijn bekend voor elk gegeven uitvalpercentage. Ik veronderstel nl. dat een goedgekeurde partij per % uitval f 8,- kost, doordat elk fout onderdeel een fout eindprodukt veroorzaakt. Afkeuren en dus volledig sorteren kost f 24,- onafhankelijk van het percentage uitval p (fig. 4.)



Figuur 4. Kosten L van afleveren en goedkeuren.

*) Soms is dit de toestand van het weer, soms de omvang van de vraag, hier is het: het percentage uitval van deze partij.

- 25 -

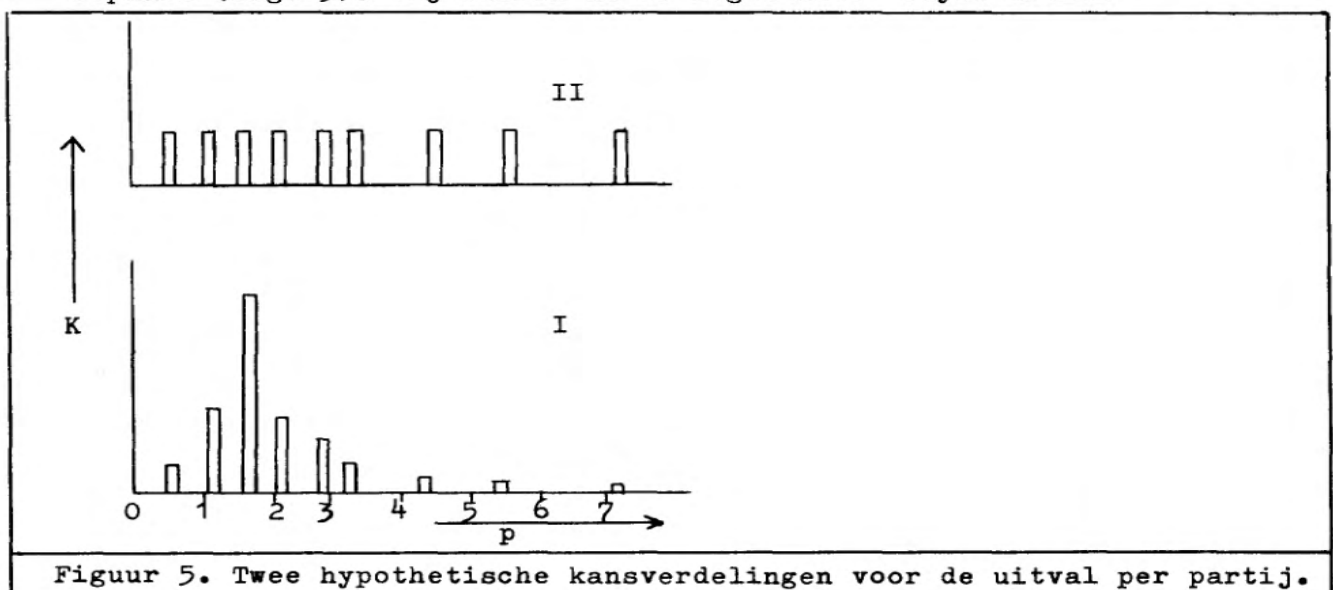
De situatie, waarin wij de beslissing moeten nemen, kan er nu nog op verschillende manieren uitzien. De denkbare gevallen kunnen als volgt worden ingedeeld:

1. De "state of nature" is geheel bekend. Dit is dus "het nemen van beslissingen in een situatie zonder onzekerheden".
2. Het % uitval van de partij is onbekend. Voor deze situatie kunnen we de "statistical decision theory" gebruiken die ten onrechte wel wordt aangeduid als DE "decision theory".
Deze situatie kan verdeeld worden in vier gevallen, namelijk:
 - 2.1 Het nemen van een steekproef is niet mogelijk of niet toegestaan, waarbij het kan zijn dat er
 - 2.1.1 geen of
 - 2.1.2 wel à priori kansen voor het % uitval bekend zijn.
 - 2.2 Er wordt wel een steekproef genomen, en ook dan kan het zijn dat er
 - 2.2.1 geen of
 - 2.2.2 wel à priori kansen bekend zijn.

In geval 1 leert een simpele rekensom, dat het goedkoper is om af te keuren als $p > 3\%$ en goed te keuren als $p < 3\%$.

In geval 2.1.1 moeten wij terugvallen op bv. de criteria van Laplace, Wald of Savage.

Geval 2.1.2 Uitval van deze partij onbekend; geen steekproef toegestaan, er zijn echter wel à priori kansen bekend. De kansverdeling van het percentage uitval per partij is in het verleden bepaald (fig. 5). Wij kunnen nu de zogenaamde "Bayes action"

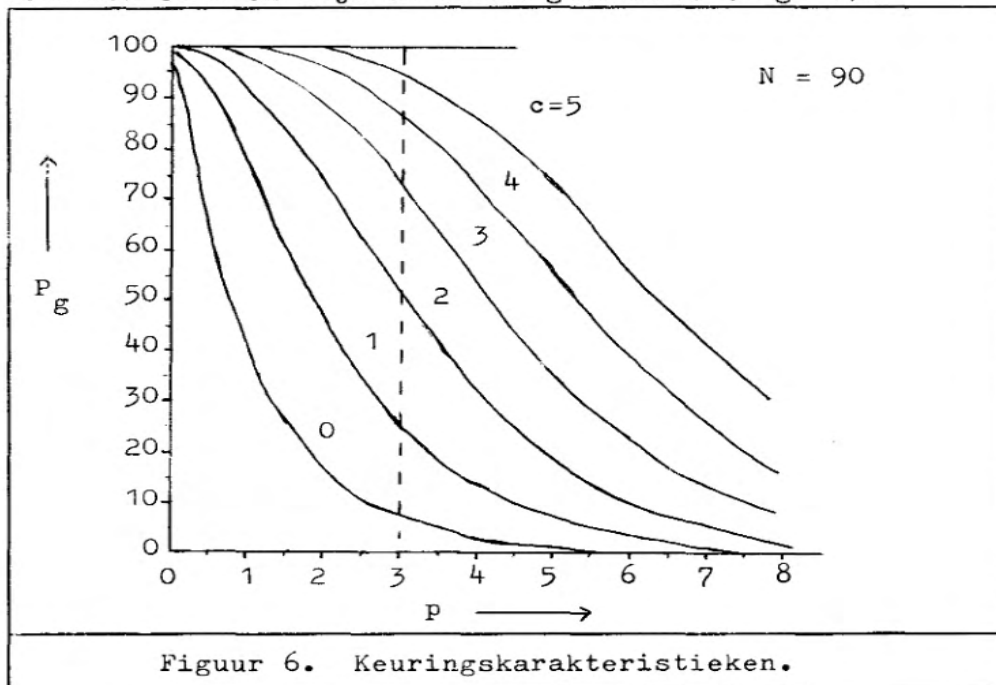


Figuur 5. Twee hypothetische kansverdelingen voor de uitval per partij.

- 26 -

vinden (zo genoemd naar de Engelse wiskundige B a y e s) door voor elke actie de gewogen consequentie te berekenen. De met I aangegeven frequentieverdeling voor p leidt tot de beslissing: "altijd afkeuren" (kosten f 24,- tegenover "f25,70 voor goedkeuren).

Ad 2.2. Er wordt nu wel een steekproef genomen. Als het aantal uitvallers in de steekproef c of minder bedraagt, keuren we goed, anders keuren we af. Dit getal c heet onze strategie. De kansrekening levert ons voor elke strategie de kans op actie goedkeuren als functie van de werkelijke uitval p . Deze keuringskarakteristieken zijn in beeld gebracht. (fig. 6).



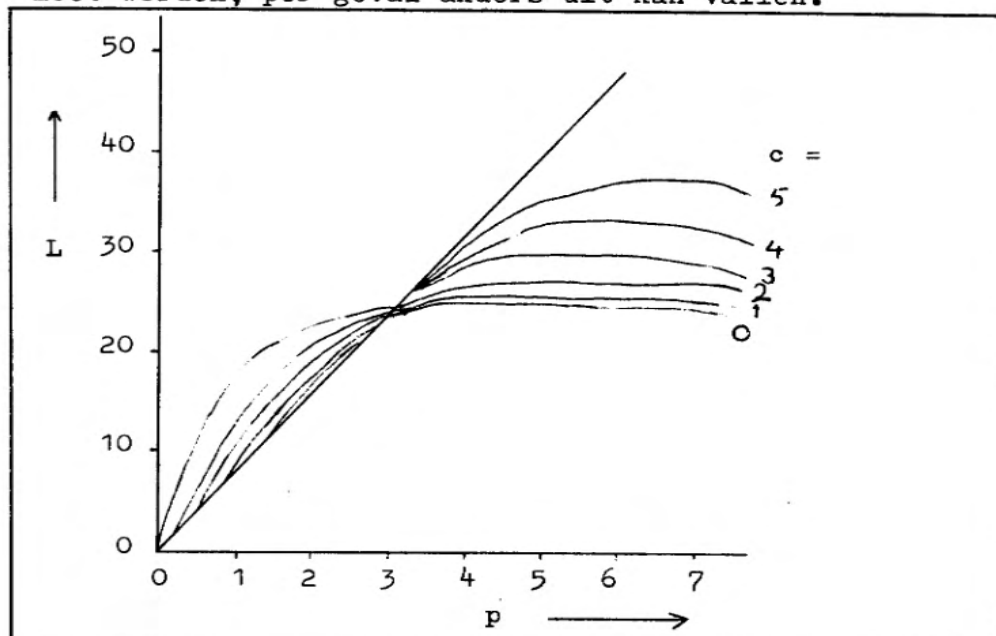
Figuur 6. Keuringskarakteristieken.

Wij berekenen nu de "kostenfuncties" (loss functions) voor elke strategie apart, door voor elke p de kans op goedkeuren resp. afkeuren te vermenigvuldigen met de kosten van die acties. Ook deze kostenfuncties zijn in beeld gebracht. (fig. 7).

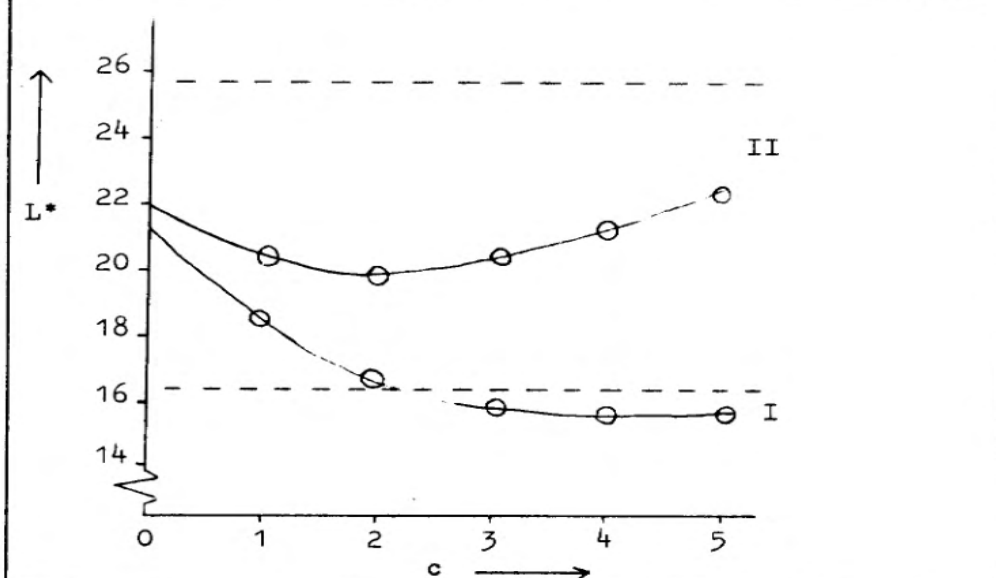
Geval 2.2.1 Terugvallen op criteria Laplace, Wald, Savage e.d.

- 27 -

Geval 2.2.2. Als wij echter wel beschikken over à priori kansen voor de uitval kunnen we in principe de B a y e s strategie bepalen, door weer voor elke strategie de gewogen consequentie te berekenen. Uit figuur 8 blijkt, dat frequentieverdeling I dan leidt tot de keuze $c^* = 4$ en verdeling II leidt tot de keuze $c^* = 2$. U ziet dus dat de beslissing, welke c genomen moet worden, per geval anders uit kan vallen.



Figuur 7. Kostenfuncties.



Figuur 8. Bepaling Bayes strategie.

De meeste bestaande steekproeftabellen zijn op grond van andere overwegingen opgesteld, dit voorbeeld was echter bedoeld om de gedachtengang van de z.g. "statistical decision theory" te demonstreren, die dus als procedure voorschrijft, achtereenvolgens na te gaan:

- welke acties zijn mogelijk?
- wat zijn de mogelijke "states of nature"
- wat zijn de kosten van elke actie bij elke "state of nature"
- wat is de kans op een bepaald resultaat van het experiment voor elke "state of nature"
- welke strategieën zijn er
- wat zijn de gemiddelde kosten per strategie per "state of nature"

3. Beslissingen in het licht van een systeemconceptie.

3.1. Wat is een systeem?

Aansluitend op de syllabus van organisatieleer voor BDK III kan het volgende gesteld worden.

De beslissingen, die in deze syllabus (bedrijfsectie) worden beschouwd, staan niet op zichzelf maar dienen vaak ter beheersing van een produktieproces en maken deel uit van een normstellingsproces of een regelproces. Deze processen vinden plaats in systemen van mensen, machines, installaties en goederen. Sommige aspecten ervan kan men beschrijven door de stromen goederen, mensen, machines, liquide middelen en vooral ook informatie (zowel inlichtende als gebiedende) die er in plaats vinden.

Bedoelde systemen kunnen op verschillende manieren worden verdeeld in subsystemen; de processen kunnen vanuit verschillende gezichtspunten worden bekeken.

De laatste 10 jaren vooral treft men steeds vaker termen aan als "systeembenadering", "systeemconceptie", "systeemtheorie", "systeem-analyse" etc.

De aanbeveling, om een "systeembenadering" toe te passen heeft niet meer inhoud dan de aanbeveling "men moet de dingen in wijder verband zien", zolang niet wordt vermeld, welke systemen men bedoelt en hoe men zich die benadering, die conceptie, die theorie, die analyse etc. voorstelt. Daarom is een nadere begripsbepaling noodzakelijk.

In navolging van anderen (Von Bertalanffy, Boulding, Johnson et al, Revans, Snow) geeft Hofstede een overzicht van systemen met opeenvolgende niveaus. Hij omschrijft daarbij systemen in het algemeen als: "integrated organized structures composed of interdependant parts".

Een korte samenvatting van een dergelijk overzicht volgt hieronder:

1. Statische structuur of raamwerk.

Voorbeelden: het periodiek systeem der elementen; de Eiffeltoren.

- 30 -

2. Eenvoudig dynamisch systeem; uurwerksysteem.
Voorbeelden: een klok; een elektrische speelgoedtrein.
3. Een gesloten regelkring met vastgestelde norm.
De "ingestelde waarde" (norm) is van buitenaf gegeven en kan door het systeem zelf niet worden gewijzigd.
Voorbeelden: motor met reguleur, centrale verwarming met thermostaat.
4. Zich zelf in stand houdend systeem.
Indien de omstandigheden veranderen, kan dit soort systeem zijn eigen normen aanpassen.
Voorbeelden: een cel in de biologie.
5. Groeiend en zich zelf reproducerend systeem.
Voorbeeld: een plant.
6. Het dier.
Gekarakteriseerd door de hersens, die zich een beeld vormen van de buitenwereld en het gedrag van het totale systeem leiden.
7. De individuele mens.
".... who not only knows, but knows that he knows"
8. Organisaties.
Hierop gaan wij dadelijk nader in.
9. Transcendentale systemen.

In het licht van deze indeling kunnen wij nu diverse boeken en colleges plaatsen, die over "systemen" spreken. De regeltechniek bv. houdt zich voor een groot deel bezig met systemen van het 3e niveau en met wiskundige modellen waarmee men die systemen kan verklaren.

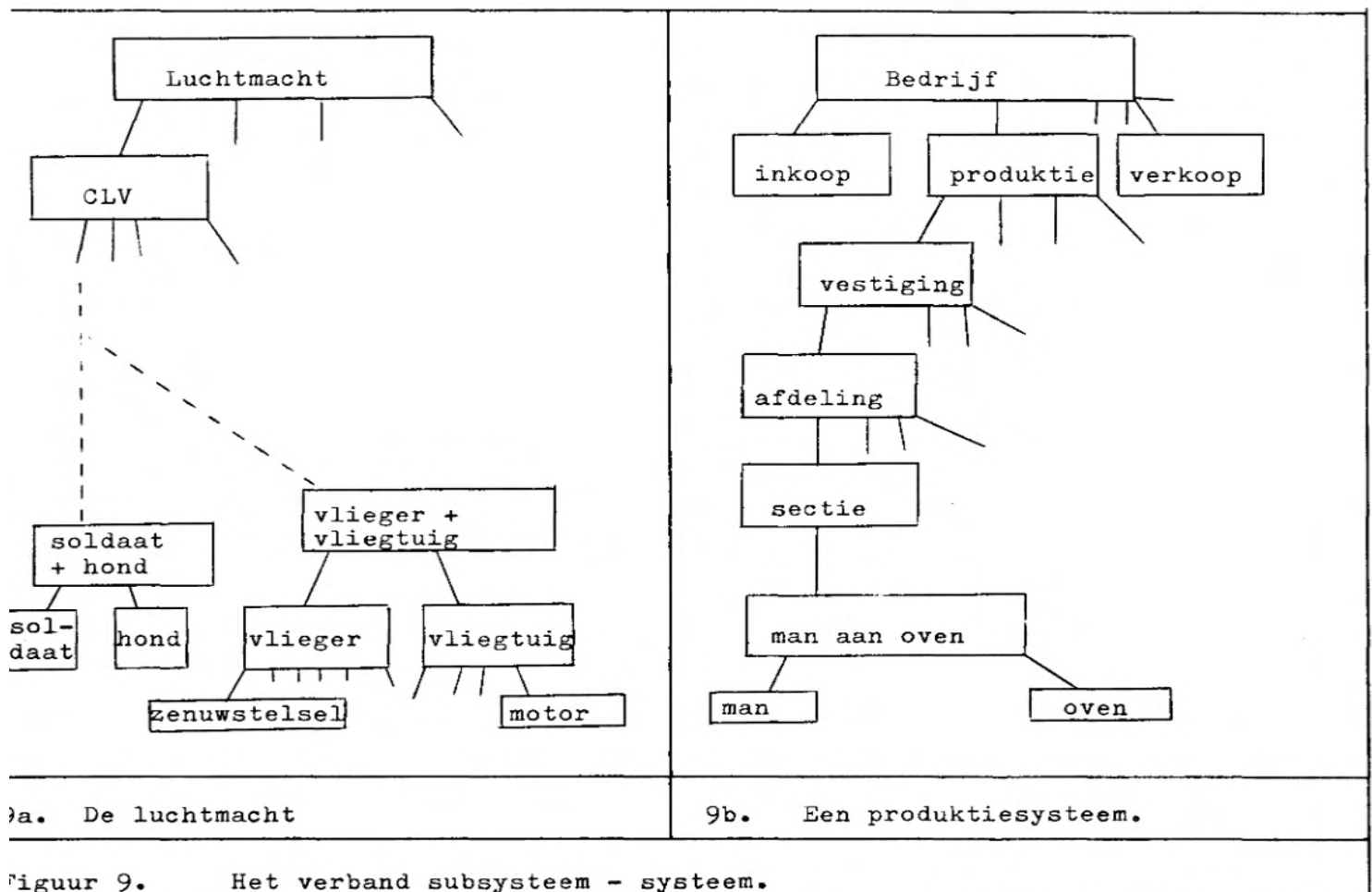
3.2. Een organisatie als systeem.

Voorbeelden van organisaties zijn: de kleine groep, een geheel bedrijf, produktiesystemen (voor een typologie hiervan: zie syllabus organisatieleer voor BDK III).

Een organisatie kan worden opgesplitst in subsystemen van hetzelfde niveau; deze subsystemen zullen soms systemen van lager

- 31 -

niveau omvatten als onderdeel. Wij moeten ons goed realiseren, dat het begrip "substelsysteem" een relatief begrip is: over een heel gebied van steeds verdergaande opbouw geldt, dat elk systeem weer een substelsysteem is in een systeem van hogere orde. In figuur 9 zijn twee voorbeelden van een dergelijke opbouw gegeven. Elk blokje in de keten kan worden beschouwd als een systeem, met een chef en een doelstelling, maar tevens als substelsysteem van een systeem van hogere orde.



Figuur 9. Het verband substelsysteem - systeem.

Pfiffner en Sherwood onderscheiden volgens een ander criterium de volgende subsystemen of "overlays" in een organisatie:

- het sociometrische netwerk
- het beslissingsnetwerk
- het communicatie-feedback stelsel

- 32 -

- d. het netwerk van functionele relaties
- e. het netwerk van machtscentra
- f. het netwerk van individuele persoonlijkheden
- g. het netwerk van persoonlijke en institutionele waarden.

In deze syllabus richten wij ons vooral op de stelsels, die met b en c werden aangeduid. Ook Ackoff en Sengupta denken waarschijnlijk vooral aan de "overlays" b en c van systemen van het 8e niveau, als zij de volgende definities geven, waarop wij ons hierna verder zullen baseren:

- "We conceive of a system as a set of activities (functions) that are connected both in time and space by a set of decision-making and behaviour- evaluation (that is, control) practices".
- "Insofar as the purposeful entity is a system, it must contain at least two interdependent parts, each of which has a different function to perform and has an objective associated with its functions".

De bedoelde systemen hebben twee eigenschappen:

- zij zijn "adaptive" (passen zichzelf aan)
- er zijn keuzemogelijkheden aanwezig; er moeten dus beslissingen worden genomen.

3.3. Relaties tussen doelstellingen.

Een van de belangrijkste problemen bij het maken of verbeteren van een bedrijf, als systeem gezien, is het aanbrengen van doelmatige relaties tussen de vele formele doelstellingen.

In de eerste plaats is het voor de centrale leiding bijzonder lastig aan te geven, in welke mate men verschillende doeleinden als continuïteit, winst, marktaandeel, arbeidsvoldoening etc. wil nastreven, waarbij interactie bestaat tussen die doeleinden.

In de tweede plaats is het een groot probleem, dat in een gedecentraliseerd systeem de beslissers in de diverse subsystemen hun eigen doeleinden nastreven op een vaak onvoldoende gecoördineerde wijze. Dat dit conflicten kan veroorzaken blijkt uit de volgende overweging, afkomstig van Ackoff en Sengupta. Stel,

- 33 -

dat een systeem bestaat uit twee subsystemen, waarvan het ene de instrumentvariabele z_1 kan instellen, terwijl het andere z_2 bepaalt. De objektfunctie, die het systeem als geheel zou willen optimaliseren, is

$$Y(z_1, z_2) - Y_2(z_1, z_2)$$

De opdracht voor het gehele systeem luidt dus:

$$\text{zoek} \max_{z_1, z_2} \left\{ Y(z_1, z_2) - Y_2(z_1, z_2) \right\} \quad (1)$$

Indien echter Y_1 het subresultaat is waarvoor subsysteem 1 verantwoordelijk is en Y_2 het subresultaat voor subsysteem 2, zal men veelal de situatie aantreffen, waarbij in feite door de acties van de beide subsystemen wordt getreefd naar:

$$\max_{z_1} \left\{ Y_1(z_1, z_2) \right\} - \min_{z_2} \left\{ Y_2(z_1, z_2) \right\} \quad (2)$$

In het algemeen zullen (1) en (2) van elkaar verschillen.

In welke richting moet een oplossing worden gezocht? Hofstede citeert Charnes en Stedry: het ideaal is "an organization whose control system is designed so that the attainment of goals set for employees at all levels of the organization contribute to organization goals".

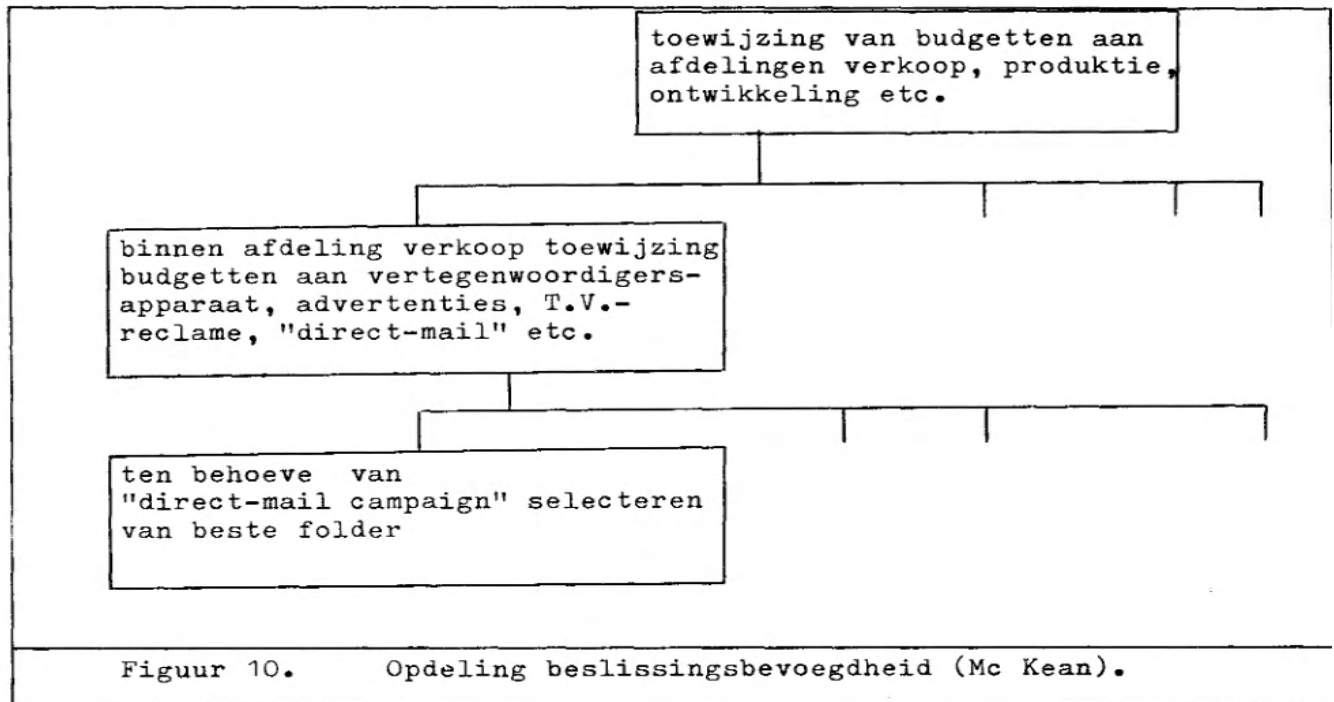
De oplossing ligt in de meeste gevallen niet in een werkwijze, waarbij men alle informatie naar een centraal punt voert ten einde daar alle beslissingen te kunnen nemen. De organisatie-leer levert daarvoor de argumenten; zie colleges organisatie-leer, Hofstede, Bosboom.

Veelal zoekt men naar een doelmatige decompositie van doeleinden. Er treden dan parallellen op met de decompositie van wiskundige problemen, bv. bij lineaire programmering (zie aldaar). De kwantitatieve aanpak kan volledig in overeenstemming worden gebracht met het streven naar doelmatige delegatie van verantwoordelijkheden en het toestaan van toleranties op het te bereiken doel voor een subsysteem. Ackoff en Sasieni geven nog de volgende argumenten voor een gedecentraliseerde aanpak:

- het bevordert de slagvaardigheid (snelheid van beslissen)
- het stelt de verschillende beslissers in de gelegenheid een intuïtief gevoel voor hun specifieke keuzesituatie te ontwikkelen.

- 34 -

Ter nadere toelichting tenslotte nog een voorbeeld ontleend aan Mc Kean, die stelt dat problemen door deze opdeling van beslissingsbevoegdheden beter hanteerbaar worden, zowel bij analyse als bij dagelijkse besturing.



3.4. Drie soorten inefficiency.

Ackoff en Sengupta definiëren drie soorten inefficiency waarvan een systeem (zoals door hen gedefiniëerd) kan lijden:

- structurele inefficiency
- communicatie-inefficiency
- beslissings-inefficiency

Voor een simpel voorbeeld worden deze drie grootheden als volgt gedefiniëerd.

(N.B.: meer algemene formulering dan het voorbeeld op pag. 33)

Een systeem heeft als objektfunctie:

$$C = Y_1(z_1, z_2) - Y_2(z_1, z_2)$$

- 35 -

Het systeem is opgedeeld in twee subsystemen; de structuur is als volgt beschreven:

	Subsysteem 1	Subsysteem 2
heeft beslissingsbevoegdheid over	z_1	z_2
heeft de verantwoordelijkheid voor	"opbrengst" $Y_1(z_1, z_2)$	"kosten" $Y_2(z_1, z_2)$
opgedragen doelstelling	$\max F_1(z_1, z_2)$	$\min F_2(z_1, z_2)$

Daarbij is $C = F_1(z_1, z_2) - F_2(z_1, z_2)$ echter $F_i \neq Y_i$. Zonder opdeling, bij goede informatie en de juiste keuzen is de (maximale) prestatie van het systeem:

$$U = \max_z [Y_1(z) - Y_2(z)]$$

Indien beide subsystemen juiste informatie hebben en de juiste keuze i.v.m. hun doelstelling doen, is de prestatie van het systeem:

$$V = \max_{z_1} [F_1(z)] - \min_{z_2} [F_2(z)]$$

Indien subsysteem 1 geen nauwkeurige informatie heeft over de waarde van z_2 , die door subsysteem 2 is gekozen maar in plaats daarvan $\hat{z}_2$ als schatting gebruikt (en omgekeerd) is, bij een juiste keuze, de prestatie:

$$W = \max_{z_1} F_1(z_1, \hat{z}_2) - \min_{z_2} F_2(\hat{z}_1, z_2)$$

Indien de subsystemen bij goede informatie de keuze verkeerd bepalen en daardoor een optimum $\max^*$ bereiken, dat naast het werkelijke optimum ligt, is de prestatie:

$$Z = \max_{z_1}^* [F_1(z)] - \min_{z_2}^* [F_2(z)]$$

Structurele inefficiency = $U - V$

Communicatie inefficiency = $V - W$

Beslissings inefficiency = $V - Z$

Hieruit resulteren o.a. de volgende twee opmerkingen:

- 36 -

- daar $V - W$ afhangt van de wiskundige eigenschappen van F_1 en F_2 , d.i. van de structuur van het systeem, zal het ene bedrijf gevoeliger zijn voor slechte communicatie dan het andere
- indien structurele inefficiency bestaat, kunnen communicatie inefficiency en/of beslissingsinefficiency wel eens gewenst zijn.

De tweede opmerking wordt geïllustreerd door het volgende voorbeeld, dat te vinden is bij Ackoff (1967), Ackoff - Sasieni, Ackoff - Sengupta.

Een handelsmaatschappij heeft twee afdelingen, n.l. inkoop en verkoop.

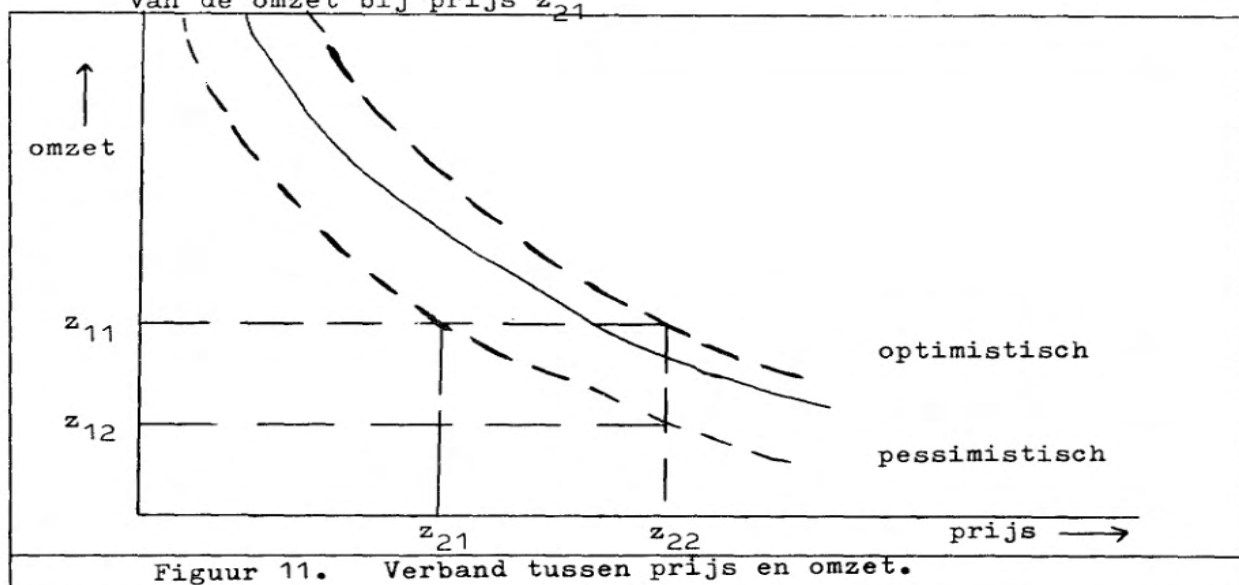
"Inkoop" bepaalt aan het begin van elke maand het in te kopen aantal stuks z_1 . Doelstelling: minimaliseer de voorraadkosten, terwijl de voorraad naar eigen schatting voldoende is ter bevrediging van de vraag.

"Verkoop" bepaalt aan het begin van elke maand de verkoopprijs per stuk z_2 . Doelstelling: maximaliseer de winst = (verkochte aantal) maal (verkoopprijs - inkoopprijs).

Beide afdelingen kennen het verband, dat in figuur 11 is weergegeven. Voorts krijgen zij onmiddellijk nauwkeurige informatie over de beslissingen van de andere afdeling.

Achtereenvolgens gebeurt nu het volgende:

- verkoop stelt de prijs z_{21} vast
- inkoop bestelt hoeveelheid z_{11} , de pessimistische schatting van de omzet bij prijs z_{21}



- 37 -

- verkoop herziet zijn beslissing en stelt de prijs vast op z_{22} , de prijs die volgens optimistische schatting een omzet z_{11} oplevert
- inkoop herziet zijn beslissing en bestelt z_{12}

Dit proces gaat door totdat beslist wordt niets te kopen, zodat ook niets verkocht kan worden en het bedrijf uit zaken is.

3.5. Verlaging van structurele inefficiency.

Ackoff en Sasieni noemen drie benaderingswijzen om structurele inefficiency te bestrijden:

- verander de opgedragen doelstellingen F.
- instrueer een subsysteem, om aangegeven waarden te gebruiken voor een (of meer) van de variabelen waarover het zelf geen beslissingsbevoegdheid heeft.

(Bijv.: schrijf een bepaalde waarde voor α voor, te gebruiken in de formule van Camp; schrijf de afdeling inkoop in het voorgaande voorbeeld voor, een bepaalde waarde voor de verkoopprijs te gebruiken). Uit een dergelijke benadering komt het begrip "schaduwprijs" voort: een schaduwprijs is in dat verband gedefinieerd als de prijs, die afdeling X geacht wordt te gebruiken voor goederen of diensten, geleverd door een andere afdeling van hetzelfde bedrijf. Deze prijzen kunnen soms sterk verschillen van de "echte" prijzen

- instrueer een subsysteem, bepaalde grenzen in acht te nemen voor de waarden van de variabelen waarover het zelf wel beslissingsbevoegdheid heeft (bv.: geef aan inkoop een tolerantiegebied voor de in te kopen hoeveelheid).

Een voorbeeld is uitgewerkt in Ackoff en Sengupta, het bevat echter een storende fout.

4. Plaats van OR tussen andere vakgebieden.

Overzicht toepassingsgebieden.

Via een zeer beknopt historisch overzicht zal de ontwikkeling getoond worden, die tot het bestaan van het vakgebied "operationele research" geleid heeft. Vooruitlopend op hoofdstuk 5 zullen we daarbij het verschil met het klassieke organisatie-onderzoek beschouwen. Tenslotte proberen we het nut van operationele research (O.R.) voor het bedrijfsleven samen te vatten en een schematisch overzicht te geven van de toepassingsgebieden.

4.1. Geschiedenis ontwikkeling OR.

Vlak voor de tweede wereldoorlog ontstonden in Engeland wetenschappelijke activiteiten met als onderwerp: militaire operaties. Voor deze activiteiten, die gedurende de oorlog snel in omvang en belang toenamen, gebruikte men in Engeland de naam "operational research" en in de V.S. de naam "operations research". Vaak wordt alleen de afkorting O.R. gebruikt. In het klassieke boek "Methods of operations research" door P.M. Morse en G.E. Kimball wordt als definitie van (militaire) OR gegeven:

"Operations research is a scientific method of providing executive departments with a quantitative basis for decisions regarding the operations under their control". Voor de industriële OR is deze definitie niet voldoende onderscheidend.

De militaire OR behandelde problemen als:

- taakverdeling bij bediening van geschut
- het effect van artillerievuur
- het opzoeken en bestrijden van duikboten

- 39 -

- de optimale grootte van een konvooi schepen
- de juiste opbouw van een nationale luchtmacht
(zie Morse en Kimball, zie R.A.F. publicatie)

Men moet echter bedenken, dat in het bedrijfsleven reeds voor de oorlog in het kader van de "wetenschappelijke bedrijfsorganisatie", "scientific management" en "industrial engineering" een trend bestond naar meer gebruik van kwantitatieve methoden ("Scientific management is management based on measuring"). Het volgende staatje moge dit nog toelichten:

- ≈ 1910 Taylor (o.a. het meten van tijden)
- ≈ 1910 Erlang (wachttijdtheorie)
- ≈ 1920 Harris, Camp (seriegrootte)
- ≈ 1930 Goudriaan, Cahen (voorraadbeheersing)
- ≈ 1930 Shewhart (statistische kwaliteitsbeheersing).

Het behoeft ons daarom niet te verbazen dat na de oorlog aanvankelijk enige wrijving ontstond tussen "OR" mensen en "industrial engineers".

Al spoedig heeft men elkaar gevonden in het besef dat onder de nieuwe naam OR activiteiten, die in aanleg reeds bestonden, meer systematisch, meer principiëel en op grote schaal waren ontwikkeld. In diverse landen werden verenigingen opgericht.

1948 Engeland: Operational Research Club, later Operational Research Society

1952 Amerika: Operations Research Society of America.

Later in Frankrijk S.O.F.R.O., in Duitsland A.K.O.R.

In Nederland werd de S.O.R., als onderafdeling van de V.V.S. (Sectie Operationele Research van de Vereniging voor Statistiek) opgericht in samenwerking tussen VVS, KIVI

- 40 -

en NIVE. (KIVI = Koninklijk Instituut van Ingenieurs
NIVE = Nederlands Instituut voor Efficiency).

4.2. Wat is operationele research?

In de vorige paragraaf werd reeds wrijving tussen OR en "industrial engineering" vermeld wegens gebleken overlap. Vooruitlopend op wat in hoofdstuk 5 nader gedetailleerd zal worden, kan reeds nu gesteld worden: Men onderscheidt diverse fasen in OR (volgorde hoeft niet altijd te zijn zoals hier gegeven).

1. Formulering van het probleem
2. Construeren van het model, verzamelen gegevens
3. Bepalen van een oplossing
4. Toetsen van het model en/of de gevonden oplossing
5. Invoeren van de verbeterde werkwijze
6. Zorgen voor de bewaking der geldigheid van de oplossing

We vergelijken dit met de fasen van een organisatie-onderzoek (Verburg, Hfdst. 12 t/m 15):

1. De probleemstelling
2. De introductie
3. De oriëntatie
4. Het verzamelen en verwerken van de gegevens
5. Het trekken van conclusies en het formuleren van voorstellen
6. Invoering en eventueel "follow-up" (nazorg)

Het verschil ligt in het gebruik van het wiskundig model bij O.R. De overeenkomst ligt in de gedragsregels voor onderzoeken in het bedrijf en de wetenschappelijke aanpak.

Voor operationele research zou dan ook de volgende omschrijving kunnen worden gebruikt, die grotendeels is ontleend aan R.L. Ackhoff:

Iemand is bezig operationele research te bedrijven als hij bezig is de handelingen te onderzoeken van een systeem van mensen, machines, installaties en goederen, in welk systeem alternatieven bestaan en beslissingen genomen moeten worden en als deze onderzoeker zich daarbij zoekt te bedienen van een wiskundig model.

Het gaat er echter niet zozeer om, scherp te definiëren wat O.R. is, dan wel een "image" van O.R. te creëren zodat men O.R. problemen of O.R. aspecten van problemen als zodanig kan herkennen.

("Timmeren is, wat de timmerman doet").

In Nederland worden ook wel de volgende namen gebruikt ter vertaling van "operationele research": operationele analyse, operationeel onderzoek, besliskunde, mathematische besliskunde.

Tegen de naam "besliskunde", hoewel kernachtig en goed Nederlands, moeten toch de volgende bezwaren worden aangevoerd indien men dit woord als vervanger van het begrip OR wil gebruiken:

- 42 -

- 1). Operationele research heeft niet betrekking op alle beslissingen, maar slechts op beslissingen ten aanzien van "operations".
- 2). Iemand die OR bedrijft zou "besliskundige" gaan heten. Deze "besliskundige" echter neemt nooit zelf de beslissingen, maar helpt slechts bij een deel van de voorbereiding ervan.
- 3). Een vak dat "besliskunde" heet, zou ook de beslissingsprocedure in een bedrijf moeten behandelen; dat doet OR echter niet en dat onderwerp heeft ook allerlei niet-kwantitatieve aspecten.
- 4). Er zijn naast de factoren, die zijn opgenomen in het O.R.-model, nog andere factoren die wel een rol spelen bij de beslissing maar niet in het model zijn opgenomen omdat
 - het model dan te ingewikkeld wordt ofwel omdat
 - deze factoren nog niet kwantificeerbaar zijn.

Het lijkt niet onmogelijk, dat op den duur de naam O.R. zal verdwijnen als aparte aanduiding van een activiteit, die eigenlijk bestaat uit toepassing op reeds bestaande gebieden (organisatie en efficiency, bedrijfseconomie) van bestaande soorten methodieken.

4.3. Het nut van OR voor het bedrijfsleven.

Het nut voor het bedrijfsleven bestaat uit:

- resultaten voor concrete gevallen (voorbeelden: zie o.a. de artikelen, op het college besproken)
- algemeen inzicht (bijv. in wachttijdverschijnselen)
- standaardmethodes voor onderzoek en berekening

Het genoemde inzicht leidt tot:

- betere bestuurbaarheid van de processen
- verbetering van de situatie, sturen naar optimum.

4.4. Overzicht industriële toepassingsgebieden.

De meeste problemen, die men bij OR ontmoet, behoren tot een van de volgende soorten (indeling volgens Ackoff):

a). Wachttijdproblemen (Q u e u i n g)

Voorbeelden: wachten van schepen in een haven;

wachten van orders in een machinefabriek;
als een chemische installatie voor onderhoud
buiten bedrijf gaat, kan zij pas weer in be-
drijf worden gesteld, als de langste aan-
eengesloten keten van handelingen gereed is.
Zie ook paragrafen 1.3. en 1.4.

b). Voorraadproblemen (V.S.:inventory; Eng.: stock)

Er zijn verschillende soorten voorraden, die later alle
besproken zullen worden.

Voorbeelden: zie paragrafen 1.1. en 1.2.

c). Problemen van toewijzing of distributie. (allocation)

Zie bijv. in paragraaf 1.2. het toewijzingsprobleem voor
eindprodukten en onderdelen.

In deel II worden de toewijzingsproblemen nader besproken.

d). Problemen van volgorde (s e q u e n c i n g)

We onderscheiden "bestellingen" die:

1. Op order gemaakt worden. Hierbij krijgen we een split-
sing in:
 - Projekten; zie completeringswachttijd
 - Losse orders. Dit is gewoonlijk het probleem van
de baas in een werkplaats; vooral als hij veel
machines en veel karweien heeft. Hij heeft kleine
karweitjes en grote karweien. Welke prioriteits-
regels zijn de beste? (Zie hiervoor Econometrie II,
formule van Cobham, diss. W. Bakker).
2. Op voorraad gemaakt worden (zie bestelsystemen).

e). Route-bepaling (routing)

Voorbeeld: Hoe richt een vertegenwoordiger zijn route in, om met zo weinig mogelijk kilometers de gegeven klanten te bezoeken.

f). Problemen van vervanging (replacement)

1. Artikelen die bezwijken

Deze artikelen hebben een stochastische levensduur. We maken onderscheid tussen zelfstandige eenheden (b.v. gloeilampen) en onderdelen van een groter geheel (b.v. autoband). Bij gloeilampen vragen we ons af: moet er telkens vervangen worden als er een stuk gaat, of is het voordeliger na zekere tijd alle gloeilampen te vervangen? (Het eerste lijkt voordeliger, maar er zal iedere keer iemand moeten komen met een ladder om 1 lamp te vervangen).

Bij een autoband ligt het iets anders. Vervangen we de band omdat we panne verwachten in verband met slijtage, of rijden we net zo lang totdat de band het begeeft? (Preventief onderhoud of niet).

Let wel, het is natuurlijk onzin om te redeneren: Er is nu al zolang geen spijker in m'n autoband gekomen, dat er eerstdaags wel een in zal komen, en dus vervang ik de band. Hier hebben we geen enkel verband tussen de beide gebeurtenissen.

2. Installaties, machines.

Bij slijtage worden deze duurder in het gebruik. De vraag is nu: Gaan we repareren of vervangen? Bij een auto: kopen we een nieuwe auto of laten we de oude revideren?

g). Problemen van concurrentie (competitive problems)

Hierbij worden de gedachtengangen van de speltheorie soms toegepast.

h). Zoekproblemen (search problems)

Vooraf militaire toepassingen.

Bijv. het zoeken van een duikboot met behulp van vliegtuigen.

5. Werkwijze en kenmerken van O.R.

Het heeft weinig zin, in het kader van een inleidend college uitgebreid over werkwijze en kenmerken te spreken.. Enkele hoofdpunten volgen hieronder. Wanneer men zelf in een onderzoek verwickeld is geraakt, is het wellicht zinvol de volgende bladzijden en de genoemde literatuur nog eens door te nemen.

5.1. Kenmerken van OR.

Vlak na de oorlog heeft men zich zeer beijverd om, door het opstellen van kenmerken, OR als zelfstandig gebied van wetenschap te markeren. De voornaamste "kenmerken" waren de volgende:

a). De wetenschappelijke aanpak.

Twee voorname karakteristieken daarvan zijn:

- verbeeldingskracht, doorzicht, fantasie, oorspronkelijkheid (zie anecdote twee artsen; de een een goede arts, de ander een goede statisticus)
- kritische instelling t.a.v. probleemstelling, feiten, hypothesen.

b). Rekening houdend met het systeem als geheel.

c). Groepswerk. In vele gevallen worden bij O.R. personen van verschillende discipline betrokken. Bij de bestudering van een moeilijk probleem over verkeersregeling zullen bijv. worden ingeschakeld: een verkeersdeskundige, een electronicus, een statisticus. Op de beide punten a en b wordt nader ingegaan bij de bespreking van de werkwijze van O.R.

5.2. Werkwijze van OR.

Een meer gedetailleerde beschouwing over de werkwijze van O.R. is gegeven door A.R. van der Burg (1963), hoofdstuk 18. Wij volstaan hier met enkele opmerkingen bij de hoofd-fasen van OR, die reeds eerder genoemd werden. Daarbij moet men bedenken, dat in de praktijk deze fasen nie:

- 46 -

gescheiden in volgorde voorkomen; vaak wordt wat "op en neer" gewerkt (zie ook de opmerkingen daarover in de paragraaf over modelconstructie).

Voor een verdere uitwerking van de werkwijze zij ook verwezen naar Ackoff - Sasieni (1968) en Magee (1958).

Formulering van het probleem.

Volgens Ackoff - Sasieni geldt:

"An individual can be said to have a problem if he wants something, has alternative ways of pursuing it, which have some, but unequal efficiency for obtaining what he wants and if he is in doubt about which course of action to select".

Teneinde het probleem te kunnen formuleren, moet daarom worden nagegaan:

- wie neemt (nemen) de beslissing(en)
- wat zijn de doeleinden, die men nastreeft?
- welke variabelen hebben invloed op het bereikte resultaat?
Welke daarvan kan men rechtstreeks beïnvloeden, welke zijn onbeïnvloedbaar?

In aansluiting hierop kan nog het volgende worden opgemerkt. Veelal kan het doel worden geformuleerd door te stellen, dat men streeft naar een maximaal verschil tussen:

- offers, input (zoals: geld, tijd, energie; comfort, veiligheid, stabiliteit)
- output (bereikte effect, resultaat).

Wat men als "offers" beschouwt en hoe zwaar men deze weegt kan in een gesprek soms worden ontdekt, door een aantal denkbeeldige oplossingen te presenteren en na te gaan, of die aanvaardbaar zouden zijn en zo niet, waarom niet.

Een moeilijk punt bij de probleemstelling is steeds weer: in hoe verre moeten en kunnen wij "het systeem als geheel" in de beschouwing betrekken? Wat wij (tenslotte) graag willen is: optimaliseren van het gehele systeem, niet suboptimaliseren in een subsysteem. Echter: de begrippen subsysteem en systeem zijn relatief; elk systeem kan steeds weer beschouwd worden als een subsysteem van een systeem van hogere orde (aarde, zonnestelsel, sterrestelsel, heelal;

- 47 -

soldaat, soldaat + wapen, peloton, compagnie, bataljon, regiment,, leger).

Zoek het niet direct te ver en te hoog.

We moeten beginnen een onderdeel van het geheel te bestuderen, bestuurbaar te maken en te optimaliseren. Vaak kiezen wij voor dit onderdeel het subsysteem, bij de leiding waarvan de probleemsteller is betrokken. Als we met dat onderdeel bezig zijn, moeten we ons steeds oriënteren op de werking en op de doelstelling van het geheel.

We beginnen met een onderdeel omdat:

- a) Men het geheel niet kan begrijpen, zonder de werking van de onderdelen te kennen;
- b) Men het geheel vaak niet kan besturen zonder de aparte schakels te kunnen regelen;
- c) Men dan reeds na vrij korte tijd enig resultaat heeft (zeer belangrijk bij de introductie van nieuwe technieken);
- d) Men vaak van het kastje naar de muur gestuurd wordt, omdat iedere medewerker in een systeem de fouten veroorzaakt ziet door een voorgaand of volgend echelon.

In hoofdstuk 16 wordt een voorbeeld gegeven, waarin werkelijk het gehele systeem wordt beschouwd; daarbij ontmoeten wij inderdaad pas de wezenlijke problemen van de bedrijfsbesturing.

Het volgende voorbeeld toont de noodzaak van een kritische instelling m.b.t. de doelstelling. In de tweede wereldoorlog vraagt men zich af: Is het nuttig om luchtafweerkanonnen op koopvaardij schepen te plaatsen? Men vindt van wel, en gaat over tot plaatsing. Na enige tijd komt er gebrek aan dit soort kanonnen en men stelt het volgende: Haal de kanonnen van de koopvaardij schepen af, want ze zijn slecht bemand, worden niet altijd doelmatig gebruikt en dus kunnen ze (elders geplaatst) meer rendabel gemaakt worden. Uit de cijfers blijkt dat in slechts 4% van de aanvallen het aanvallende vliegtuig is neergehaald. Dit schijnt de pessimisten gelijk te geven. Er werd echter terecht opgemerkt: Het doel is niet het neerhalen van vliegtuigen, doch het beschermen van de schepen. Er komt nu ander cijfermateriaal tevoorschijn:

- 48 -

	WEL GEVUURD	NIET GEVUURD
AANTAL SCHEPEN AANGEVALLEN	155	71
AANTAL GEZONKEN	16	18
	10%	25%

Het voorbeeld toont tevens aan, dat kosten niet altijd het criterium behoeven te zijn. Bij vele bedrijfsproblemen echter vormen de kosten wel het criterium.

Bij vele bedrijfsproblemen is de eerste eis niet: optimaal werken, maar: bestuurbaarheid en soms stabiliteit. Ter vergelijking: zolang een auto nog kapotte remmen heeft, een ondoorzichtige voorruit en veel speling in het stuur interesseren wij ons nog niet voor de kosten per km. Vaak is de probleemstelling in het bedrijf: leer het proces begrijpen, breng meetpunten aan en zet eenvoudige regelingen op. Pas daarna is er belangstelling voor streven naar het optimum.

Mc Kean noemt nog een aantal veel voorkomende fouten bij het formuleren van de doelstelling:

- "zoveel mogelijk produkten voor zo min mogelijk geld" in plaats van ofwel "zoveel mogelijk produkten voor een vaste som geld", ofwel "een bepaald aantal produkten voor zo min mogelijk geld";
- niet letten op totale omvang van winst of kosten;
- vergeten van neveneffecten.

De OR man moet niet verwachten, dat elke directeur of bedrijfs-leider zijn doelstellingen exact kan formuleren. Wil men in het komende kwartaal de winst maximaliseren? de kosten minimaliseren? het marktaandeel vergroten? De taak van de OR man houdt in, door

- 49 -

deelneming aan gesprekken daarover het formuleren van een duidelijke doelstelling te bevorderen.

Gericht vooronderzoek is de beste introductie en de eerste stap ter oriëntatie.

Evenals een arts eerst met de patiënt spreekt, teneinde zijn klachten te horen, maar hem daarna onderzoekt, evenzo kan de OR man natuurlijk niet volstaan met een gesprek met de opdrachtgever. Daarna volgen gesprekken met anderen, waarnemingen, experimenten. Een dergelijke systeemanalyse kan als volgt gebeuren:

- bepaal, aan wiens behoeften of verlangens buiten de organisatie men tracht te voldoen. In een bedrijf betekent dat vaak:
 - . welke klanten wil men bedienen
 - . welke goederen of diensten worden geleverd?
- bepaal, hoe de organisatie informatie krijgt over deze behoeften of verlangens
- ga na, hoe deze informatie wordt vastgelegd en verspreid.

Bij een probleem op het gebied van planning, voorraadbeheersing en produktiebesturing komt dit neer op een beschrijving van:

- a) de goederenstroom
- b) de informatiestroom
- c) de wijze waarop a) met behulp van b) wordt geregeld.

Voorbeelden hiervan kunnen o.a. worden gevonden in Buffa, Ackoff - Sasieni, Magee, Industrial Engineering Handbook (hfst. 3 "process-chart procedures").

Enkele voorbeelden zijn in deze syllabus opgenomen*) Zie ook de schematechniek van Forrester (pag.

Bij het waarnemen en ook later, bij het doen van metingen om de waarde te bepalen van parameters in het model, wordt gebruik gemaakt van technieken als:

- interviewen
- analyse formulierenloop
- arbeidsstudie
- analyse administratieve gegevens
- MMO

*) fig. 12 t/m 18.

Voorbeeld weergave informatiestroom in een formulierdiagram.

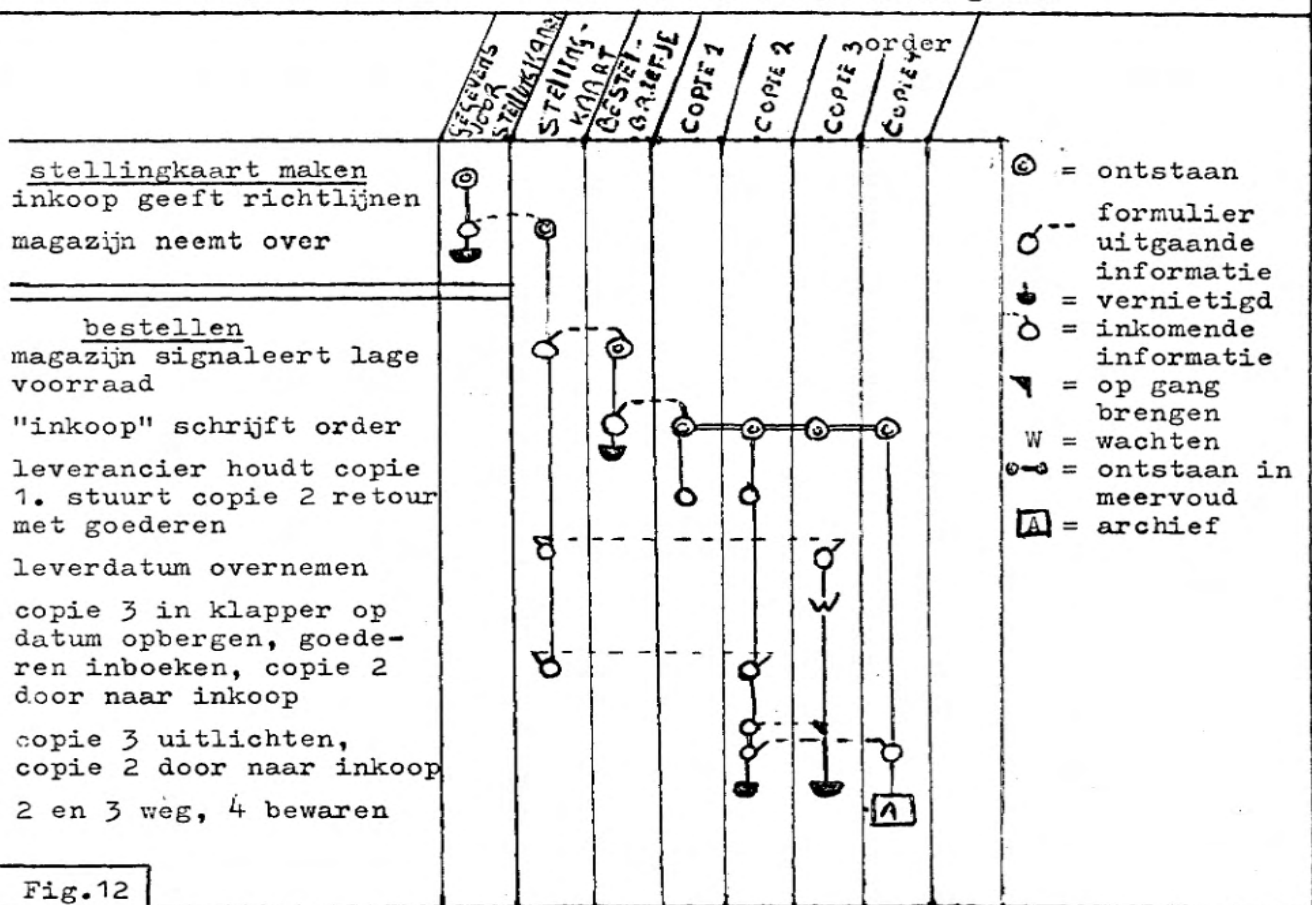


Fig. 12

De volgende figuur is geïnspireerd op Ackoff, Arnoff en Churchman, blz. 88 en geeft de informatiestromen weer.

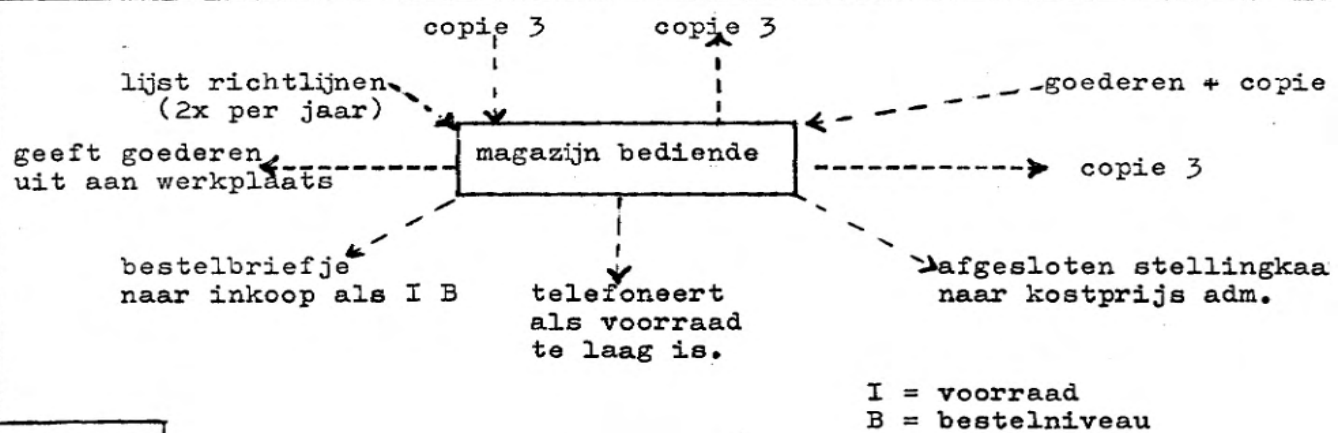
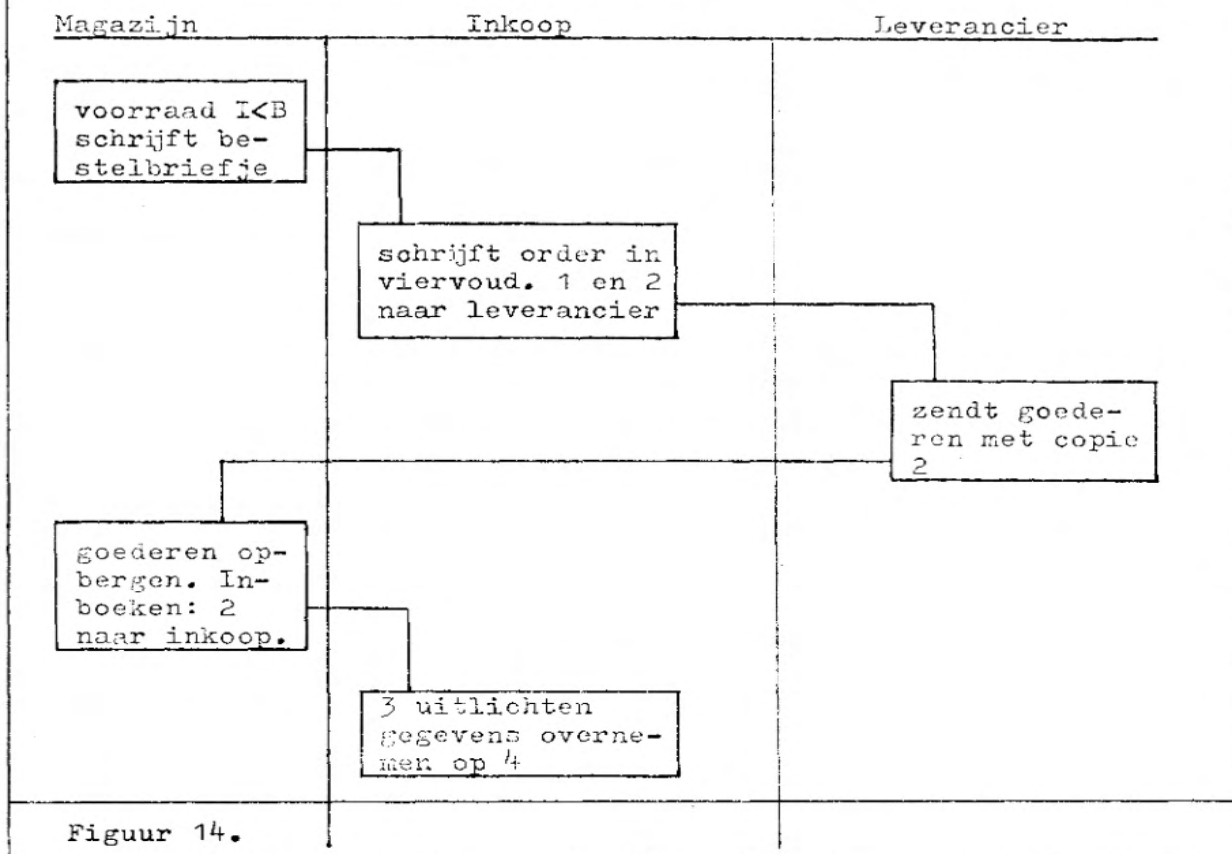
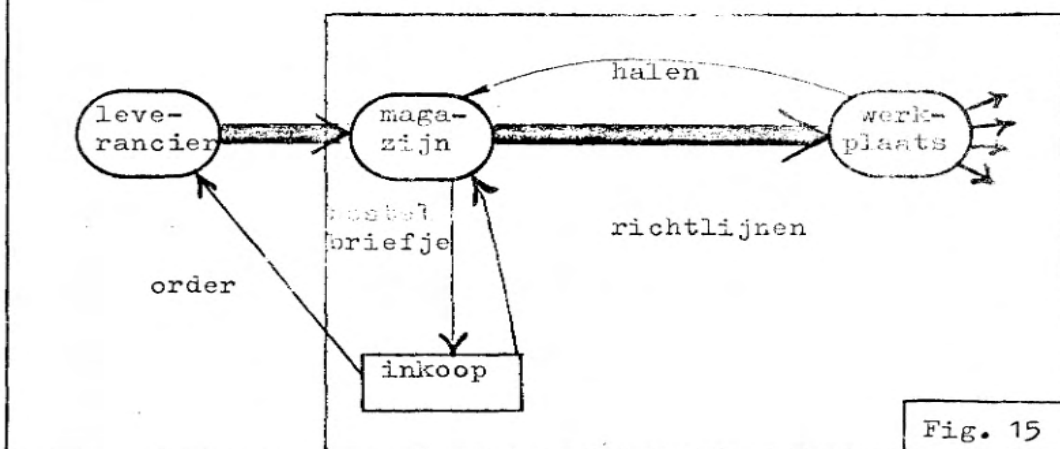


Fig. 13

Het samengaan van informatiestroom en goederenstroom kan als volgt geschetst worden: (Zie ook Hijmans fig. 12).



Ook kan de besturing van de materiaalstroom als volgt worden weergegeven (Zie ook Magee blz. 278 en 281).



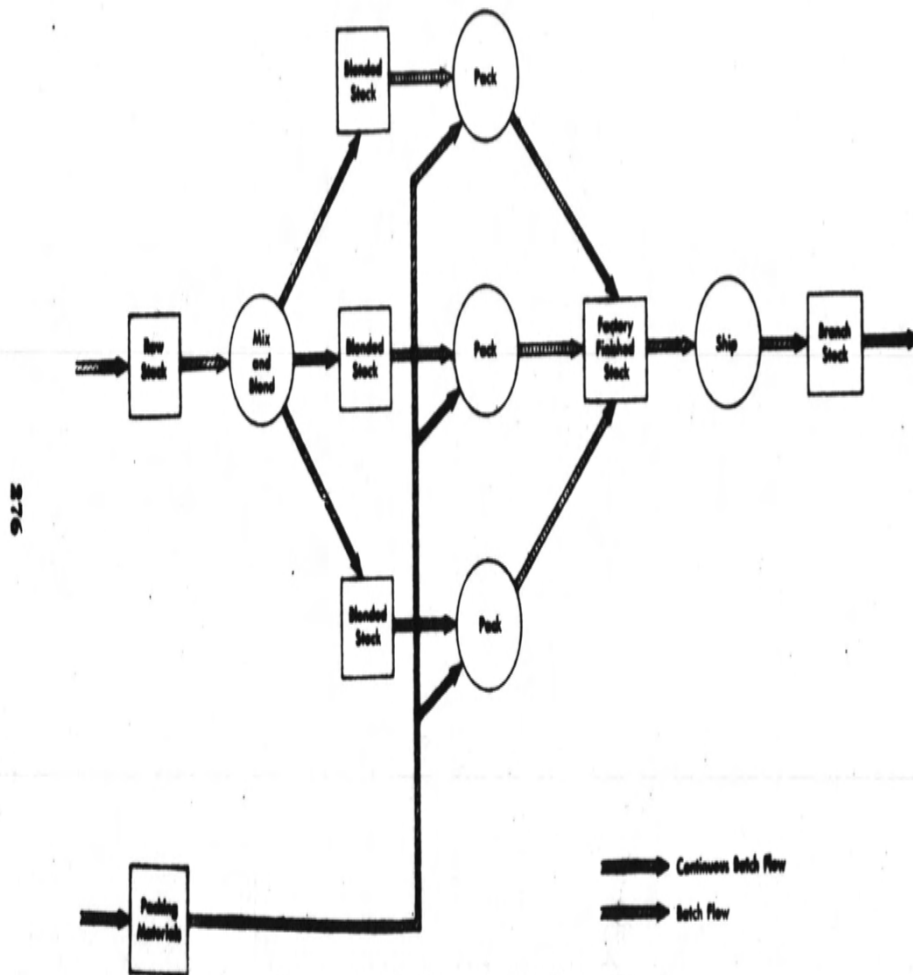


Fig. 11.1. Material Flow, Household-chemicals Manufacturer

Magee Production planning.

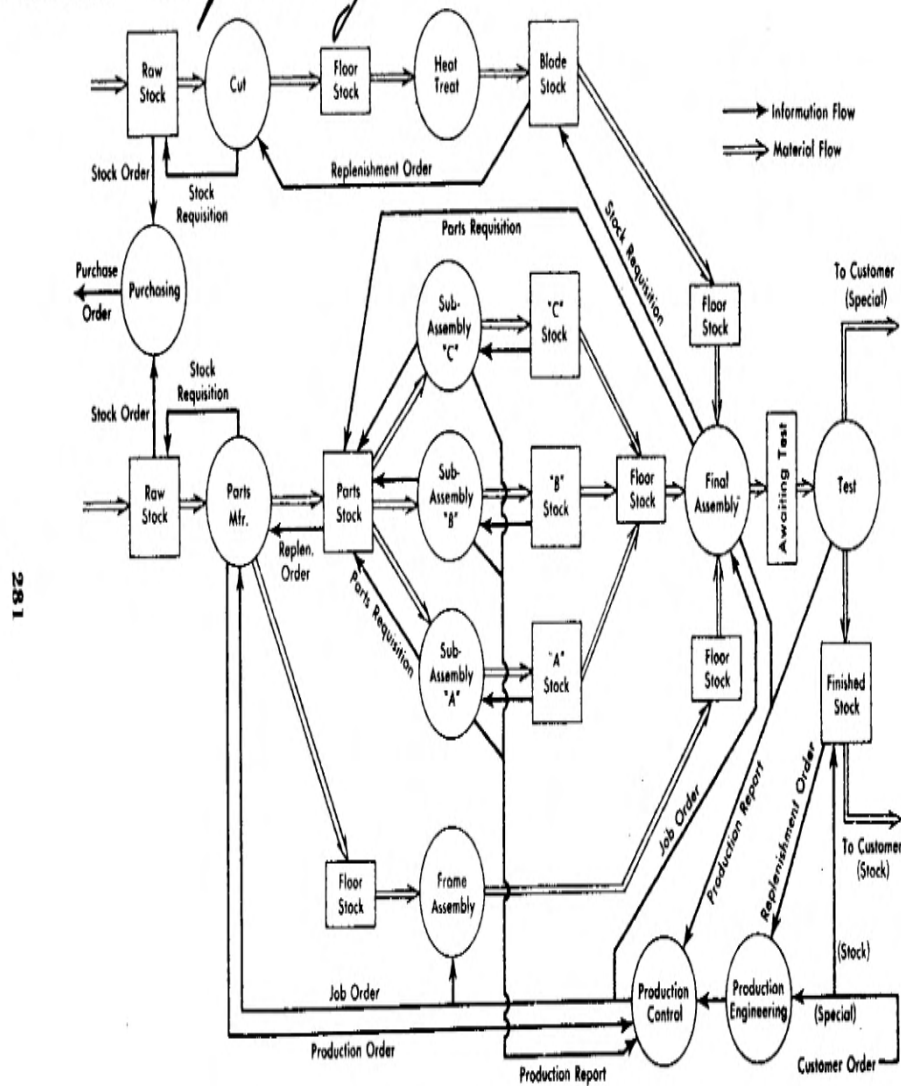
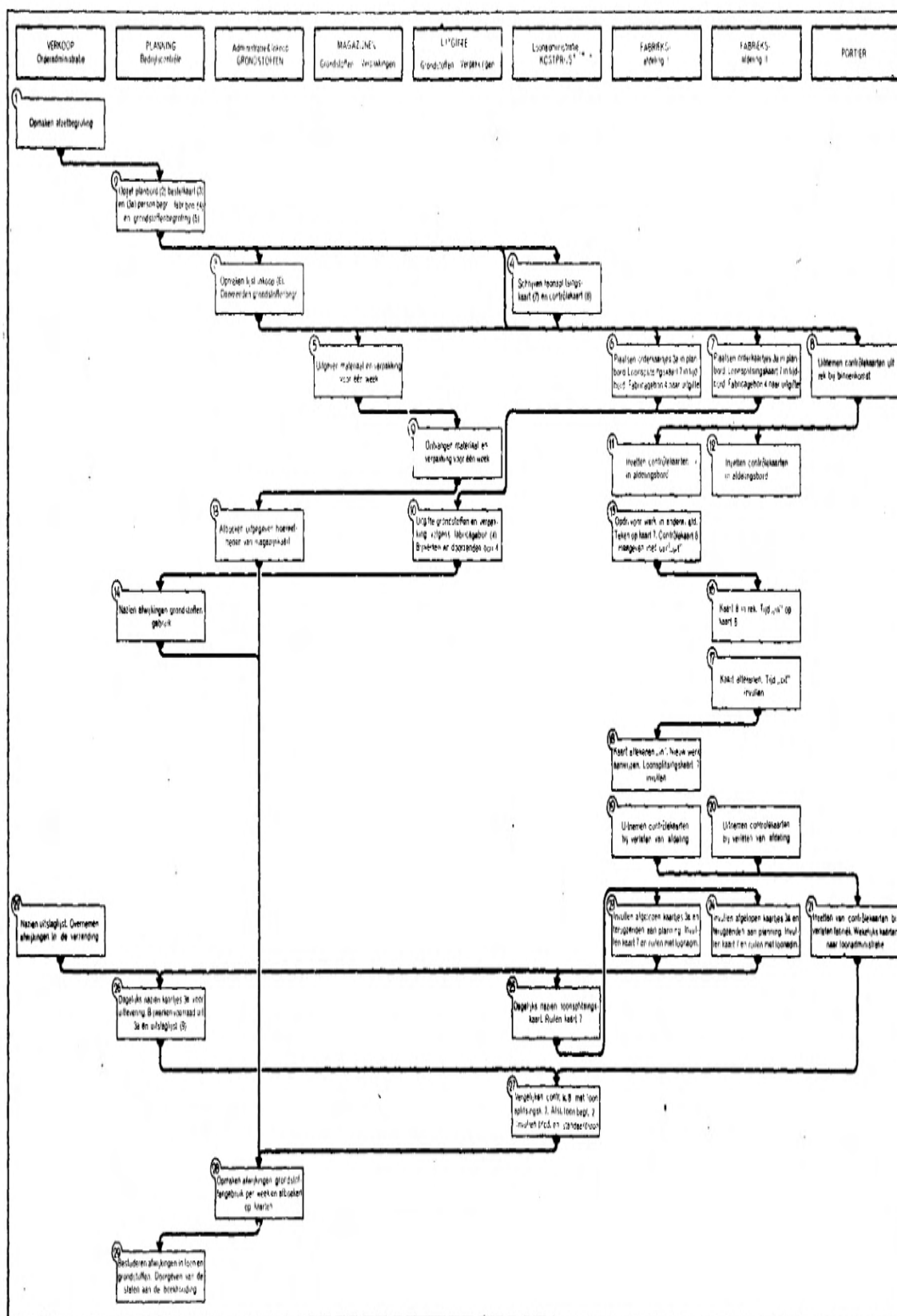


Fig. 11.4. Information Flow, Industrial-equipment Manufacturer

2/3 stock items
1/3 special items



- 55 -

Een originele techniek werd toegepast door A. Jenssen. Hij had tot taak, de oorzaak van botsingen tussen schepen te analyseren. Hij maakte filmopnamen van radarwaarnemingen van scheepvaartverkeer, vertoonde deze films voor een gezelschap van deskundigen. Tijdens deze vertoning in informele sfeer was er steeds geroezemoes, maar af en toe stokten de gesprekken even en hield men de adem in. Jenssen analyseerde de situaties, die daartoe aanleiding geven. Dit bleken de momenten te zijn, waarop men een aanvaring vreesde; opvallend was, dat dan veelal 3 schepen vlak bij elkaar waren. Conclusie was, dat het ging om de kans, dat 3 schepen tegelijkertijd zich binnen een bepaalde oppervlakte bevinden.

Construeren van het model.

Het model is een abstractie van de werkelijkheid en bevat o.a. een aantal veronderstellingen omtrent de werkelijkheid. Bijv.: wij nemen aan, dat de voorraad volgens een zaagtand verloopt (zie figuur 2).

In de natuurkunde kent men bijv. het model van Bohr. In de sterrenkunde kent men bijv. het beschrijvende model van Ptolemaeus (bruikbaar voor voorspelling) en het meer verklarende model van Kepler (basis voor "begrijpen" en beheersen).

Wij proberen de maatstaf voor goede werking (het criterium, de doelvariabele) expliciet te schrijven als een functie van door ons te beïnvloeden variabelen (control variables; instrumentvariabelen) en andere variabelen.

Voorbeeld: seriegrootteberekening,

$$C = f(Q, D, F, K, x)$$

(zie pag. 16)

Bedenk, dat ook aan een tabellenboek (bijv. Peck en Hazelwood) steeds een bepaald model ten grondslag ligt.

Ackoff - Sasieni schrijven:

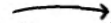
"The quality of a model depends very much on the imagination and creativity of the research team. Intuition, insight, and other

mental operations that are essentially unregulatable play a major role in the process. It is not possible, therefore, to prepare a manual of instructions for model building. If such a manual could be prepared, it would be more likely to constrain than promote creativity".

Wel onderscheiden deze auteurs 5 verschillende patronen, volgens welke de activiteiten veelal verlopen.

Het meest eenvoudige patroon is dat, waarbij aan de hand van waarneming en discussie direct het wiskundig model kan worden neergeschreven. Het vierde patroon is dat, waarbij bewust opgezette experimenten nodig zijn omdat uit de aanwezige gegevens principieel onvoldoende informatie is te halen (bv. over de invloed van diverse reclame-akties).

Morris (1967) maakt terecht onderscheid tussen "teaching of models" en "teaching of modeling". Hij geeft 3 hypothesen betreffende een doeltreffende methode van modelconstructie:

- a) Het is nuttig het proces van modelbouw te zien als een proces van verrijking of uitbreiding. Zeer schematische, te ver gesimplificeerde modellen worden ontwikkeld tot modellen, die de werkelijkheid beter weergeven.
- b) Bedoeld proces bevat tenminste twee soorten wisselwerking of kringloop:
 - model  gegevens over de werkelijkheid
 - model  mogelijkheid, om er resultaten mee te verkrijgen
- c) Bij de bepaling van het startpunt van het proces spelen analogie of associatie met reeds eerder ontwikkelde logische structuren een belangrijke rol. Hier ligt de voornaamste waarde van "teaching models".

Tenslotte geeft Morris de volgende nuttige wenken voor de aanpak van een probleem (in zijn artikel aan een voorbeeld gedemonstreerd):

- deel het probleem op in simpeler problemen
- probeer te beseffen, waartoe het model wordt gemaakt
- zoek analogieën

- bestudeer een bepaald numeriek voorbeeld
- voer symbolen in
- schrijf in vergelijkingen dat neer, wat vanzelf spreekt
- als een model is opgesteld, waarmee resultaten kunnen worden verkregen, maak het dan gecompliceerder; anders: simplificeer nog verder.

Verder simplificeren betekent o.a.:

- . beschouw variabelen als constanten
- . laat variabelen buiten beschouwing
- . gebruik lineaire verbanden
- . voeg verdergaande veronderstellingen en beperkingen toe
- . verwaarloos toevalseffecten

Probeer dus niet in één stap het model te bouwen, begin met een model en ga dan stapsgewijs verder.

Oplossen van het model.

Verschillende wegen kunnen tot het doel leiden:

- analytische methodes (zie seriegrootte-probleem)
- numerieke methodes (zie lineaire programmering, een iteratiemethode)
- simulatiemethodes

Ook bij OR worden steeds vaker computers gebruikt.

Verzamelen van gegevens.

Het verzamelen van gegevens vraagt veel tijd en leidt vaak tot een onderzoek apart, waarbij de toegepaste statistiek een grote rol speelt.

Veelal zijn kostengegevens nodig. Deze kostengegevens worden nu niet gevraagd ten behoeve van de kostprijsberekening; over het algemeen kunnen de gezochte gegevens niet zonder meer gehaald worden uit de administratie, die immers vaak wel op de kostprijsberekening is gericht. Zie verder de colleges kostprijsberekening en Van der Schroeffer (1963) "Kosten en Kostprijs", pag. 34-37 ("different costs for different purposes") en pag. 355 e.v. (de differentiële kostenbeschouwing).

- 58 -

Bij de beantwoording van de vraag, hoe nauwkeurig de gegevens moeten zijn, kan men gewoonlijk het wiskundig model en de oplossing daarvan goed gebruiken. Als voorbeeld de seriegrootteberekening:

Stel dat $F = f 5,-$, maar dat we (foutief) $F = f 10,-$ gevonden hebben. We vinden nu een q^* die $\sqrt{\frac{10}{5}}$ maal te groot is. Dus q wordt $1,4 \times 20.000 = 28.000$. Wat is het effect als we deze verkeerde serie gebruiken?

Jaarkosten $C = \frac{100.000}{28.000} \times 5 + 14.000 \times 0,003 \approx f 58,20$.

We zien dus dat dit een afwijking van 6 à 7% ten opzichte van de minimaal bereikbare uitkomst ($f 54,80$) oplevert.

(We denken echter dat de jaarkosten $\frac{100.000}{28.000} \times 10 + 14.000 \times 0,003 = f 77,70$ zijn).

Met enkele voorbeelden kan nog geïllustreerd worden, hoe noodzakelijk een kritische instelling is bij waarnemingen en metingen.

Bv. De kosten van stagnaties in het produktieproces tengevolge van buiten voorraad raken worden gewoonlijk te laag geschat. (Reken hieronder ook: De kosten om te voorkomen dat men plotseling buiten voorraad raakt, zoals spoedbestellingen, "chasseren" en improviseren).

Een ander voorbeeld:

Engelse tankschutters dachten dat hun richtmiddelen niet meer deugden, omdat zij de vijandelijke tanks niet meer raakten. (Ze zagen althans geen inslagen meer).

Het bleek, dat de projecten afketsten op een verbeterde bepantsering, waarvan ze niet op de hoogte waren.

Het toetsen van het model en/of oplossing.

We moeten de uitgangspunten toetsen.

Indien dit niet wel mogelijk is, in ieder geval de oplossing toetsen. De methoden hiertoe zijn:

- a) Het naspelen van het verleden. Wat zou er gebeurd zijn als de voorgestelde methode gevolgd was?
- b) Monte Carlo; wat zou er allemaal kunnen gebeuren.

c) Schaduw-systeem; d.w.z. het oude systeem wordt in het bedrijf gehandhaafd, maar we "spelen" de gang van zaken tegelijkertijd met een nieuw systeem.

De voordelen van methode c zijn, dat men tevens:

- 1) door demonstraties de mensen ervan kan overtuigen dat 't met het nieuwe systeem beter gaat
 - 2) de mogelijke oneffenheden ontdekt en kan verwijderen
 - 3) de mensen reeds kan trainen voor het nieuwe systeem.
- Nadeel: duurt erg lang; na enige tijd ontstaat groot verschil tussen echte en schaduw-situatie, waardoor vergelijking moeilijk is.
- d) gedeeltelijke invoering. Het gevaar hierbij is, dat er dan twee systemen naast elkaar bestaan, waarbij het personeel wellicht door een voorkeur voor het oude systeem, het nieuwe systeem geen kans geeft.

De invoering.

Doel van het onderzoek is: invoeren van een nieuwe verbeterde werkwijze. Daarbij zijn sociaal-psychologische en organisatorische aspecten zeer belangrijk.

Bij een goed opgezet onderzoek wordt vanaf het begin reeds rekening gehouden met het feit, dat later invoering zal volgen.

De fase "invoering" heeft een karakter dat verschilt afhankelijk van de soort beslissing, waarop het onderzoek gericht was (zie hoofdstuk 2).

Bij voorkeur moet regelmatig en mondeling worden gerapporteerd aan de opdrachtgever en andere betrokkenen, echter schriftelijke vastlegging is toch nodig, n.l.

- a) vastleggen wat de gedachtengang is geweest
- b) vastleggen wat het onderzoek heeft opgeleverd
- c) beschrijving van het nieuwe systeem als richtlijn voor diverse instanties.

Het rapport mag nooit "Uit de lucht vallen".

Voor uitvoering rapport zie o.a. Dr. Ir. H. de Boer e.a.

- "Schriftelijk rapporteren", vooral ook: practica Drs. Bakker.

- 60 -

Invoering moet in vele gevallen geleidelijk plaats vinden. Nieuwe bestelmethodes bv. eerst voor een deel van de artikelen toepassen en langzaam "toegroeien" naar nieuwe voorraadniveau.

Bewaking geldigheid.

Dit punt wordt over het algemeen veel te veel verwaarloosd. Bij 't voorbeeld van de serie-grootte: bewaak D, F en σ^2 . De beste voorzorg is: een goede opleiding van de betrokkenen. Dit geldt vooral ten aanzien van eventueel noodzakelijke wijzigingen in het te gebruiken model. Ook ligt hierin een eis, de in te voeren methodes, rekenwijzen e.d. aan te passen aan het niveau van de mensen, die het moeten gaan doen.

Samenvatting.

Uit het voorgaande blijkt, dat tijdens het onderzoek steeds heen en weer wordt gewerkt tussen werkelijkheid en model. Kennis van toegepaste statistiek is noodzakelijk bij: Verzamelen van de gegevens

Toetsen van de hypothesen

Bewaken van de geldigheid van de oplossing.

Prof. Goudriaan definiëerde in 1928 reeds de werkwijze van "toegepaste wetenschap" als volgt:

1. Analyse van het doel, dat wij willen bereiken
2. Ontleding van alle factoren, die de oplossing van het vraagstuk beïnvloeden en van de mogelijkheid, die factoren te beïnvloeden
3. Aanknopende aan de praktijk: opstellen van de reeks oplossingsmogelijkheden die bestaan, resp. denkbaar zijn
4. Reeks conclusies, aangevende onder welke voorwaarde welke methode het beste voldoet.

Vragen aansluitend bij deel I.

- 1) In "Operations Research" van november 1955 beschrijft Brigham een studie over wachttijden aan een loket voor

uitgifte van gereedschappen. Welke omissie maakt hij bij de aanpak, in grote lijnen gezien? Wat is zijn doelstelling? Kunt U zich in het beschreven geval andere doelstellingen voorstellen? Welke alternatieven beschouwt Brigham? Kunt U meer alternatieven bedenken? (Zie ook E.H. Bowman en R.B. Fetter -"Analyses of industrial operations" 1959, chapter 15).

- 2) De directie van een nieuw te bouwen "supermarkt" vraagt een advies over de "optimale grootte van het parkeerterrein". Hoe zou U, in grote lijnen, een dergelijke opdracht uitvoeren? Welke informatie heeft U nodig?
- 3) Bedrijf X heeft grondstof A nodig en houdt daarvan een voorraad. Deze grondstof wordt met tankschepen aangevoerd en in opslagtanks bewaard. Men vraagt naar "de optimale grootte van een tankschip". Wat is de doelvariabele?
- 4) Een warenhuis overweegt instelling van een koopavond; het bedrijf is nu alleen overdag geopend. Hoe zou de probleemstelling kunnen luiden?
- 5) Een bedrijf heeft extra kantoorruimte nodig. Er kan gekozen worden tussen het aankopen van pand A of pand B. Pand A kost het minste per m^2 . Is meer informatie nodig?
- 6) Tijdens een onderzoek in een fabriek wenst men de doorlooptijd van werkorders te weten. Hoe kan deze meting worden uitgevoerd? Men kan bv. een steekproef nemen uit alle orders, die in een bepaalde week de fabriek ingaan, deze met een rode stip merken etc.
- 7) In een montagehal wordt in tarief gewerkt. In verband met aankoop van een nieuwe kraan wil men weten, hoeveel stagnatie in de huidige situatie ontstaat door wachten op de kraan. Zou een enquête onder de arbeiders een goed beeld geven?
- 8) Welke gegevens zijn nodig om de omstelkosten van een machine te bepalen?
- 9) De optimale seriegrootte moet worden berekend voor een situatie, waarvoor de formule van Camp gebruikt mag worden. De werkelijke totale kosten mogen niet

- 62 -

meer dan 2% afwijken van de minimaal bereikbare. Hoe nauwkeurig moet D worden bepaald indien mag worden aangenomen, dat alle andere factoren exact bekend zijn?

10) Wanneer heeft preventief onderhoud zin?

- 63 -

Literatuuropgave voor deel I.

Achter elke titel is door een letter- en cijfercodering enige indicatie gegeven over inhoud en aard.

A = hier alleen opgenomen als literatuurverwijzing

B = zelfde stof als in syllabus, doch anders verteld

C = zelfde stof, meer populair behandeld

D = zelfde stof en verdere uitbreiding

E = zelfde stof, strakker en wiskundig moeilijker

F = aanbevolen voor verdere studie

1, 2, 3, 4, 5 = aanduiding van de paragraaf uit deze syllabus
waarop de publicatie ingaat

6 = overzicht van aantal OR methoden

x = aanbevolen	}	{	indien bij het college ver-
xx = sterk aanbevolen			duidelijking wordt gezocht

1. R.L. Ackoff, E.L. Arnoff en C.W. Churchman - "An introduction to operations research" Wiley 1957	D	2,3,4, 5,6	x
2. R.L. Ackoff - "Progress in operations research", Hfdst. 1.	E,F	5	
3. R.L. Ackoff en P. Rivett - "A managers guide to operational research" Wiley 1963	C	1,2,4, 5	
4. R.L. Ackoff en M.W. Sasieni - "Fundamentals of operations research" Wiley 1968	D,F	2,3,4, 5,6	x
5. R.L. Ackoff en S.S. Sengupta - "Systems theory from an operations research point of view" IREE Transactions on Systems Science and Cybernetics. Nov. 1965	E,A	2,3	
6. H. de Boer e.a. - "Schriftelijk rapporteren", Aulareeks	A	5	
7. E.H. Bowman en R.B. Fetter - "Analysis for production management" Irwin, Homewood 1961.	D	6	x
8. E.H. Bowman en R.B. Fetter - "Analyses of industrial operations" Irwin, 1959	D,F	6	
9. E.S. Buffa - "Modern production management" Wiley 1965	C	2,3,5, 6	
10. I.D.J. Bross - "Design for decision". Mc Millan, New York 1953. Vertaald als Marka 18.	C	2	

- 64 -

11. A.R. van der Burg - "De beste beslissing nemen" Samson 1963.	C	4,5	
12. H. Chernoff en L.E. Moses - "Elementary decision theory" Wiley 1959.	D	2	:
13. J.F. Mc Closkey en F.N. Trefethen - "Operations research for management" Baltimore 1954.	D	4	
14. R.W. Cabell en A. Philips - "Problems in basic operationsvrst research methods for management" Wiley 1961.		6,5	
15. Conferences IFORS 1957, 1960, 1963, 1966.	D,E,F	1 t/m 6	
16. Duckworth - "A guide to operational research" Londen 1962. Vertaald als Marka nr. 12.	C	2 t/m 6	
17. R.T. Eddison e.a. - "Operational research in management" English University Press 1962.	C,D	5,6	
18. S.E. Elmaghraby - "The design of production systems" Reinhold 1966.	E,F	2,3,5,6	
19. L.S. Goddard - "Mathematical techniques of operational research" Pergamon 1963.	E	6	
20. G.H. Hofstede - "The game of budget control" Van Gorcum 1967.	A	3	
21. F.S. Hillier en G.J. Lieberman - "Introduction to operations research" Holden Day 1967.	D,F	4,5,6	:
22. E. Hijmans en E. Hijmans - "Hoofddlijnen der toegepaste organisatie".	A	5	
23. R.A. Johnson, F.E. Kast en J.E. Rozenzweig - "The theory and management of systems" Mc Graw Hill, 1968 (2e druk!)	A	3	
24. R.N. Kean	A	2	
25. A. Kaufmann en R. Faure - "Invitation à la recherche operationelle", Dunod 1963. Vertaald als Marka nr. 17.	D,C	2,6	
26. J.F. Magee - "Production planning and inventory control" Mc Graw Hill 1958. Chapter 11.	D,F	5	
27. H.B. Maynard (editor) - "Industrial engineering handbook"	D	5	
28. W. Monhemius - Intreerede THE 1963.	A	4	
29. W. Monhemius - "Besliskunde, een vlag die de lading dekt?" Stat. Neerl. <u>17</u> (1963) nr. 4, p 363 - 381.	A	2,4,5	
30. P.M. Morse en G.E. Kimball - "Methods of operations research" Wiley 1958.	A,B	5	
31. W.T. Morris - "On the art of modeling" Management Science <u>13</u> , 12, augustus 1967, p 707 - 717.	A	5	

- 65 -

32. J.M. Pfiffner en F.P. Sherwood - "Administrative Organization" Prentice-Hall 1960, vertaald als Marka 55.	A	2,3	
33. E.B. Roberts - "Industrial dynamics and the design" Management Technology, <u>3</u> (1963) nr. 2, p 110 - 118.	A	2	
34. T.L. Saaty - "Mathematical methods of OR" Mc Graw Hill 1959.	D,E,F	5,6	x
35. M. Sasieni, A. Yaspan en L. Friedman - "Operations research; methods and problems" Wiley 1961.	C,D	6	x
36. J. Sittig - "Programmering van de woningbouw in verband met de woningkwaliteit". Stat. Neerl. <u>18</u> (1964) nr. 1 p 65 - 74.	A	2	
37. J. Sittig - "Managers beslissen met behulp van de wetenschap" Stat. Neerl. <u>10</u> , p 1 - 17.	A	2	
38. M.K. Starr en D.W. Miller - "Executive decisions and operations research" Prentice-Hall 1960.	A	2,6	
39. H. Theil, J.C.G. Boot en T. Kloek - "Voorspellen en beslissen" Marka 9.	C,D	2,6	x
40. Vazsongi - "Scientific programming in business and industry" Wiley 1958.	C,D	2,5,6	
41. B. van der Veen - "Introduction to the theory of operational research" Philips 1967.	D,F	2,6	xx
42. P. Verburg - "Organiseren en organisatie-onderzoek" Leiden 1959.	A	5	
43. J.D. Williams - "The compleat strategyst" Mc Graw Hill 1954, vertaald als Marka 36.	D,F	2	

II. METHODEN EN RESULTATEN VAN O.R. TOEWIJZIGINGSPROBLEMEN.

6. Toepassingsgebieden van lineaire programmering.

Zowel bij bedrijfsleven als bij overheidsinstellingen zijn veel problemen van bedrijfsvoering uiteindelijk problemen van toewijzing; geld, capaciteit, ruimte etc. moeten worden toegewezen aan de verschillende activiteiten. In het kader van dit college zal alleen lineaire programmering (L.P.) worden besproken. De voornaamste probleemstellingen en toepassingsgebieden zullen worden beschouwd. De rekenwijze van L.P. wordt besproken, echter zonder de juistheid daarvan te bewijzen. Aan een numeriek voorbeeld wordt daarna nader toegelicht, ook grafisch, hoe de simplexmethode werkt en hoe de uitkomsten moeten worden geïnterpreteerd. Tenslotte wordt een zeer vluchtige blik geworpen op het gehele gebied van de wiskundige programmering. Op het college wordt een praktijktoepassing besproken. Voor verdieping van de wiskundige behandeling wordt verwezen naar de colleges van Professor Dr. J.F. Benders.

6.1. De probleemstelling van L.P.

Aan de hand van een zo ver mogelijk vereenvoudigd voorbeeld zal de probleemstelling worden toegelicht. Stel: op 2 plaatsen A en E in Nederland staan in magazijnen apparaten van een bepaald type ter beschikking en wel resp. 15 en 10. Op 2 andere plaatsen H en G in Nederland heeft men 11 resp. 14 van deze apparaten nodig. De kosten van transport worden beschreven door de kosten per apparaat te vermelden voor de verschillende routes:

naar van	H	G
A	f 7,--	f 11,--
E	f 12,--	f 13,--

Het kernpunt is nu, dat wij proberen de totale kosten van transport te minimaliseren. Zoekt men de goedkoopste wijze,

- 67 -

om 11 apparaten naar H te brengen: haal er 11 uit A.
 Zoekt men de goedkoopste wijze, om 14 apparaten naar G te brengen: haal er 14 uit A. Er zijn echter in A maar 15 stuks ter beschikking. Zoek dus de oplossing die de totale transportkosten minimaliseert met inachtnahme van de gegeven beperkingen.

Indien x_{AH} = aantal stuks te transporteren van A naar H, kan de probleemstelling worden geformuleerd als:

$$\text{minimaliseer } K = 7x_{AH} + 11x_{AG} + 12x_{EH} + 13x_{EG} \dots (1)$$

$$\text{terwijl } x_{AH} + x_{AG} = 15 \dots (2)$$

$$x_{EH} + x_{EG} = 10 \dots (3)$$

$$x_{AH} + x_{EH} = 11 \dots (4)$$

$$x_{AG} + x_{EG} = 14 \dots (5)$$

$$\text{en bovendien } x_{AH} \geq 0, x_{EH} \geq 0 \text{ etc} \dots (6)$$

Daar totale vraag = totaal aanbod, volgt vgl 5 uit vgl 2,3 en 4.

In feite moeten dus 4 variabelen worden bepaald uit 3 vergelijkingen; er is echter een minimalisatie-eis.

Uit de vgl. 2 t/m 5 kan nu worden afgeleid:

$$x_{AH} = 15 - x_{AG} \dots (7)$$

$$x_{EG} = 14 - x_{AG} \dots (8)$$

$$x_{EH} = x_{AG} - 4 \dots (9)$$

zodat vgl 1 kan worden geschreven als

$$K = 239 + 3x_{AG}.$$

Hoe kleiner x_{AG} , hoe kleiner K. Echter gezien (6) en (9) kan x_{AG} niet kleiner zijn dan 4.

De optimale oplossing kan als volgt worden voorgesteld:

naar van	H (11)	G (14)
A(15)	7 11	11 4
E(10)	12	13 10

- 68 -

De rekenmethodes van L.P. zijn ontworpen om gecompliceerde en omvangrijke varianten van het beschreven probleem op te lossen. Men kan daarom stellen: de rekenmethodes van L.P. zijn methodes

- voor het minimaliseren (of maximaliseren) van een lineaire functie van een aantal variabelen, welke zijn onderworpen aan een aantal lineaire beperkingen
- die aangeven hoe men beperkte middelen moet toewijzen om een bepaald doel na te streven (laagste kosten, minste tijd etc.) wanneer die middelen alternatieve toepassingen hebben.

Uiteraard is L.P. pas van belang voor problemen van grotere omvang of complexiteit, waar het menselijk brein het overzicht verliest.

Zonder de opkomst van de computer zou L.P. nooit tot het huidige niveau van toepassing gekomen zijn. Vrijwel alle belangrijke toepassingen van L.P. maken van computers gebruik. Standaardprogramma's voor L.P. zijn in veel rekencentra aanwezig. Daarom is het voor "toepassers" in eerste instantie van belang, toepassingsgebieden te kunnen herkennen, een probleem in de juiste vorm te kunnen gieten en de uitkomsten van de berekening te kunnen interpreteren.

Reeds hier moet, aansluitend op het gegeven voorbeeld, worden vermeld dat L.P. niet alleen bij gegeven beperkingen de optimale oplossing geeft. Men kan ook nagaan, hoeveel winst het zou opleveren als een van de beperkingen zou kunnen worden verruimd;

bijv: met hoeveel dalen de transportkosten van de beste oplossing als in A een apparaat extra aanwezig is (bij gelijkblijvende vraag; in E blijft dan 1 apparaat staan).

6.2. De voornaamste toepassingsgebieden.

Teneinde L.P.-problemen te kunnen herkennen, is het goed een overzicht te hebben van reeds bestaande toepassingen. Een dergelijk overzicht kan op verschillende wijzen worden ingedeeld, zie bijv. Gass, Metzger, Van der Burg. Een mogelijke indeling is de volgende.

- 69 -

De zogenaamde transportproblemen.

Het gegeven voorbeeld is het eenvoudigst denkbare geval. In het algemeen kan men formuleren: een volledig bekend aanbod van goederen, ruimte of produktiecapaciteit moet worden verdeeld over resp. toegewezen aan eveneens volledig bekende vragen naar die goederen, die ruimte of die capaciteit.

Voorbeeld 1. In Groot-Brittannië verbruikt de C.E.G.B. (Central Electricity Generating Board) ongeveer 40 miljoen ton kolen per jaar. Deze kolen komen van 800 mijnen en gaan naar 200 centrales. Elke 6 maanden maakt men een plan voor het transport. Eerst is dit probleem per "division" opgelost. De kleinste "division" omvatte 5 centrales, 20 mijnen; de grootste omvatte 33 centrales en 103 mijnen. (Zie Williams en Haley). Op dit voorbeeld bestaan talloze varianten.

Voorbeeld 2. Een groot concern maakt bepaalde apparaten in 6 verschillende landen. De montage dient ter plaatse te gebeuren. De produktie van onderdelen echter kan in elk der 6 landen gebeuren, zolang de capaciteit ter plaatse niet overschreden wordt. Waar moet men wat maken?

Voorbeeld 3. Een grote draaierij krijgt elke week een pakket orders, dat in die week gereed moet komen. Vele van de orders kunnen technisch op verschillende banken gemaakt worden; er zijn dus alternatieve produktiemogelijkheden. Welke order gaat naar welke bank?

Voorbeeld 4. Indien de totale vraag naar produkten een systematisch patroon over het jaar vertoont (eventueel per produktgroep een ander patroon) is de vraag of deze fluctuaties moeten worden opgevangen door voorraadvorming, overwerk, ploegenarbeid etc. Indien voorraadvorming nodig is, voor welke produktgroepen? Bij dit voorbeeld en het vorige kan ook het alternatief "make or buy" optreden.

- 70 -

Deze 4 voorbeelden geven geen volledig overzicht, maar zijn wel representatief. Nogmaals: LP geeft niet alleen het beste "transportprogramma" bijgegeven waarde van de beperkingen, maar kan ook informatie leveren aangaande de winst, die bijv. verkregen kan worden door een bepaalde capaciteit te vergroten. (N.B. In deze voorbeelden bleef het probleem van volgorde in de tijd ("scheduling") buiten beschouwing.

Het beste assortiment.

Bij een gegeven capaciteit zoekt men naar de beste samenstelling van het produkten-assortiment. Er kunnen ook beperkingen zijn in de verkrijgbaarheid van grondstoffen of in de afzetmogelijkheden.

Voorbeeld 5. Een fabriek brengt verschillende soorten landbouwwerktuigen op de markt. Voor elk type is er een bepaalde maximaal mogelijke afzet. Ook de capaciteit van elk der fabrieksafdelingen (mech. wpl, plaatw., mont.) is beperkt. Wat is het produktieprogramma, waarmee dit bedrijf het meest winst kan maken? Welke afdeling komt het eerst in aanmerking voor capaciteitsuitbreiding? Hoeveel levert dat op?

Voorbeeld 6. Een fabriek produceert 4 soorten vet, V_1 t/m V_4 . Deze soorten bestaan alle vier uit dezelfde grondstoffen - oliën - maar in verschillende samenstellingen.

Deze grondstoffen worden aangeduid met G_1 t/m G_5 .

De mengverhoudingen - uitgedrukt in fracties van het totaal - blijken uit onderstaande tabel:

	V_1	V_2	V_3	V_4
G_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
G_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
G_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
G_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
G_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

$$\sum_{i=1}^5 a_{ik} = 1 \quad \text{voor alle } 1 \leq k \leq 4$$

- 71 -

Tijdens de produktie passeert iedere grondstof 5 machines (M_1 t/m M_5) met resp. capaciteit d_1 t/m d_5 (uitgedrukt in machine-uren per maand).

De grondstof G_i kost p_i (b.v. guldens per ton).

De bewerkingstijd per ton G_i op machine M_j bedraagt t_{ij} .

De produktiekosten van één ton G_i op machine M_j bedragen c_{ij} . Het gereedgekomen produkt wordt tenslotte verkocht à raison van v_k gulden per ton van soort k .

Gevraagd: hoe moet de produktie over de vier eindprodukten worden verdeeld, teneinde een zo hoog mogelijke netto-opbrengst op te leveren?

Opl.: Stel x_k is de hoeveelheid V_k die per maand wordt geproduceerd ($k = 1, 2, 3, 4$);

Laat verder y_1 t/m y_5 de verwerkte hoeveelheid G_1 t/m G_5 voorstellen. We kunnen nu de volgende relaties opschrijven, die op de samenstelling van de produkten betrekking hebben.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ y_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \\ y_5 &= a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

$$x_j \geq 0 \dots\dots(2)$$

Voor de machines gelden de capaciteits-restricties:

$$y_1 t_{1j} + y_2 t_{2j} + y_3 t_{3j} + y_4 t_{4j} + y_5 t_{5j} \leq d_j \dots\dots\dots(3)$$

voor $j = 1$ t/m 5

Substitueren we (1) in (3), dan ontstaan 5 lineaire ongelijkheidsrelaties in x_1 t/m x_4 .

Voor de netto opbrengst, W , kunnen we nu schrijven:

W = bruto opbrengst - kosten grondstoffen - kosten van produktie.

$$W = x_1 v_1 + \dots + x_4 v_4$$

$$- (y_1 p_1 + \dots + y_5 p_5)$$

$$- y_1 (c_{11} + \dots + c_{15}) - y_2 (c_{21} + \dots + c_{25}) - y_3 (c_{31} + \dots + c_{35}) - y_4 (c_{41} + \dots + c_{45}) - y_5 (c_{51} + \dots + c_{55}).$$

Substitueren we (1) in deze vergelijking, dan hebben we W uitgedrukt in x_1 t/m x_4 alleen. Het gaat er nu dus om de

- 72 -

maximale waarde te vinden van een lineaire functie, die aan een aantal (eveneens lineaire) condities moet gehoorzamen Formule (3) .

Op de oplossing van zo'n probleem wordt later teruggekomen (simplex methode).

De beste receptuur ("diet problem").

Voorbeeld 7. Gevraagd wordt tegen zo laag mogelijke kosten een voedselpakket voor melkkoeien samen te stellen, dat voldoet aan eisen betreffende minimale dagelijkse hoeveelheden calorieën, proteïne, calcium etc.

Voorbeeld 8. Ontleend aan Duckworth. Een gieterij van lagers heeft elke dag een bepaald mengsel nodig. Om dit mengsel samen te stellen staan ter beschikking: een aantal smelten teruggewonnen uit afvalmateriaal en ook zuivere grondstoffen. Wat is, elke dag opnieuw, de goedkoopste wijze om het gevraagde mengsel samen te stellen.

Voorbeeld 9. Ook het volgende probleem, een zeer schematische aanduiding van in werkelijkheid optredende problemen, kan als een "diet problem" worden geformuleerd. Een papiermachine fabriceert papier met een breedte van 215 cm. De volgende orders moeten worden geleverd:

2.000 m. papier met een breedte van 64 cm.	} één order hoeft niet uit 1 lange baan te bestaan.
1.000 m. papier met een breedte van 60 cm.	
1.000 m. papier met een breedte van 35 cm.	

Hoe moet het papier versneden worden om zo weinig mogelijk afval te krijgen?

De "clou" van de oplossing is, dat alle mogelijke combinaties worden opgeschreven. Dit zijn:

combinatie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aantal banen 64 cm.	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
Aantal banen 60 cm.	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
Aantal banen 35 cm.	0	0	2	0	2	4	1	2	4	6
Breedte afvalstrook in cm.	23	27	17	31	21	11	0	25	15	5

Als variabelen voeren we nu in: x_1 t/m x_{10} , te weten het aantal meters papier dat van de baan (breed 215 cm.) moet worden versneden volgens methode combinatie 1, 2 etc. t/m 10.

Het bovenstaande geeft weliswaar geen compleet overzicht, maar toch een goed hulpmiddel om na te gaan, waar LP met vrucht zou kunnen worden toegepast. In allerlei soorten industrie zijn toepassingen van LP aanwezig of in opkomst; toch willen we speciaal vermelden:

- de chemische industrie, de olie-industrie, de voedings- en genotmiddelen-industrie
- concerns of overheidsinstellingen met meerdere fabrieken waar hetzelfde produkt gemaakt wordt en/of nodig is; denk hierbij ook aan lege spoorwagens, lege pallets etc.

Steeds komen nog nieuwe toepassingen van LP te voorschijn zoals bijv. het gebruik bij regressie-analyse.

Wat is nu het voordeel van toepassing van LP?

Vaak primair: men krijgt weer overzicht over het geheel en kan de consequenties van verschillende acties overzien (resp. beter overzien). Daardoor kunnen kosten dalen en winsten stijgen; beslissingen over uitbreiding van capaciteit worden beter gefundeerd. De beste oplossing wordt soms ook verkregen tegen lagere kosten dan voorheen en met minder tijd van dure functionarissen. Door Duckworth wordt terecht gewezen op de grote flexibiliteit van een OR-oplossing ten opzichte van uitsluitend ervaring. Over de verbetering door LP in de situatie van voorbeeld 8 zegt hij het volgende:

„Vroeger werd dit probleem behandeld door een ervaren chemicus die bijna de helft van zijn tijd besteedde aan het nemen van de nodige beslissingen. Thans wordt het opgelost, met behulp van lineaire programmering, door een rekenaar die er op een tafelrekenmachine ongeveer twee uur per dag over doet. Aanvankelijk werden, na het invoeren van de lineaire-programmeringsmethoden, geen grote besparingen geboekt. Het percentage teruggewonnen smelten dat werd benut, steeg echter met ongeveer 4% en omdat het mogelijk werd de bruikbaarheid van alle beschik-

bare partijen te onderzoeken, nam de doorstroomsnelheid van de voorraad aanzienlijk toe. De chemicus met zijn rekenlineaal daarentegen was geneigd zich te concentreren op de meer voor de hand liggende smelten, waardoor de minder bruikbare zich opstapelden. De chemicus had zijn werk goed gedaan en in de loop der jaren een grote ervaring verkregen, zodat aanvankelijk geen spectaculaire besparingen voor de dag kwamen. In de volgende twee jaren demonstreerde Wyatt echter duidelijk de superioriteit van lineaire programmering boven de oude methode. Het systeem is zeer flexibel en kan zich zeer snel aan veranderingen in de voorraad en de vraag aanpassen. De vroegere techniek, die noodzakelijkerwijs op ervaring was gebouwd, kon slechts langzaam worden gewijzigd. Bij de teruggang in de motorindustrie, in 1956, toen de verhouding tussen voorraad en vraag veranderde, werden geen voorraden van teruggewonnen metalen gevormd. De gewijzigde omstandigheden werden in de berekeningen verwerkt en de toenemende hoeveelheid smelten werd onmiddellijk benut. Dit in tegenstelling met voorgaande depressies waarin vrij hoge voorraden werden gevormd voordat de veranderde toestand in de berekening werd betrokken. De methode met behulp van de lineaire programmering geeft een globaal overzicht van het proces dat uit de berekeningen wordt verkregen. Op het ogenblik is het duidelijk welke soort smelt kan worden gebruikt en welke niet. De laatste mogen niet in voorraad worden gehouden, maar er wordt aangeraden ze onmiddellijk te verkopen!"

6.3. De benodigde gegevens.

Het verkrijgen van de benodigde kosten-cijfers is vaak moeilijk omdat zij niet zonder meer uit de administratie volgt, die veelal primair op kostprijsberekening is ingesteld. Wij zoeken de kosten, die beïnvloedbaar zijn door de keuze tussen de beschouwde alternatieven. In vele gevallen zullen kostencategorieën als afschrijving op gebouwen en machines geheel buiten beschouwing blijven. Sommige bedrijven gebruiken speciaal een systeem van "direct costing" om de voor dit soort berekeningen benodigde differentiële kostencijfers te kunnen leveren.

7. Rekenmethodes van LP.

Aan de hand van een numeriek voorbeeld, dat eerst grafisch en daarna algebraïsch wordt opgelost, zal de gedachtegang van de rekenmethode "simplex" worden ontwikkeld.

7.1. Probleemstelling (numeriek voorbeeld).

Een bedrijf bezit 1 installatie die 8 uur per dag kan werken en waarmee men produkt A of produkt B kan maken. Het produceren van 1 eenheid A duurt 1 uur; voor 1 eenheid B is dit 2 uur. De grondstoffenbeperkingen staan een produktie toe van ten hoogste 4 eenheden A per dag en ten hoogste 3 eenheden B per dag. Per eenheid A resp. B maakt men f 200,-- resp. f 300,-- winst. Wat is, gegeven deze beperkingen, het beste produktieprogramma voor de komende maand, uitgedrukt in hoeveelheden per dag?

Formulering:

$$x_A + 2x_B \leq 8 \quad (1)$$

$$x_A \leq 4 \quad (2)$$

$$x_B \leq 3 \quad (3)$$

$$x_A \geq 0 \quad x_B \geq 0 \quad (4)$$

$$\max W = 200x_A + 300x_B \quad (5)$$

x_A = aantal eenheden produkt A per dag

x_B = aantal eenheden produkt B per dag

x_A en x_B hoeven geen gehele getallen te zijn.

N.B.: de volgorde in de tijd wordt hier niet beschouwd.

7.2 Grafische oplossing.

Een voorbeeld van deze omvang kan grafisch worden opgelost; ter verduidelijking van de simplexprocedure is het verhelderend, dat ook te doen.

De relaties (1) t/m (4) definieren samen een gedeelte van het $x_A - x_B$ -vlak; zie fig. 19, het gearceerde deel.

Elk punt binnen deze zgn. "simplex" correspondeert met een toegelaten oplossing, d.w.z. een realiseerbaar produktieprogramma

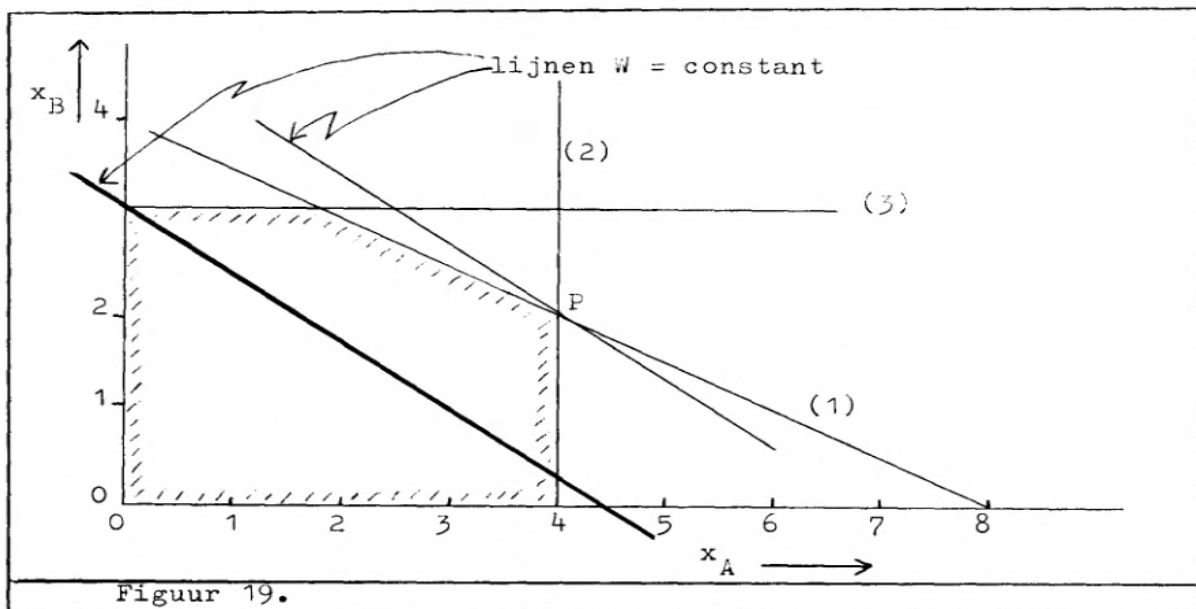
Omgekeerd kan elk realiseerbaar program door één punt binnen de simplex worden aangegeven.

Het gaat er nu om, uit alle mogelijke produktieprogramma's dat program te kiezen dat de hoogste opbrengst levert, d.w.z. dat punt te bepalen waarvoor de funktie W , zoals gedefinieerd door (5) maximaal is.

Daartoe wordt in de figuur ook een van de rechten

$$W = \text{constant} \geq 0$$

getekend. Merk op, dat alle punten die de rechten met de simplex gemeenschappelijk heeft, realiseerbare programma's voorstellen met gelijke opbrengst. Ook valt in te zien dat, naar gelang we de rechte met behoud van zijn richting verder van de oorsprong afleggen de waarde van W (en dus van de opbrengst) stijgt. De optimale toegelaten oplossing wordt dus gegeven door het laatste punt van de simplex dat de verschuivende rechte ontmoet. In figuur 19 is dit het punt P . Verdere verschuiving levert weliswaar verdere verhoging van de waarde van W , maar leidt tot niet-toegelaten oplossingen.



Figuur 19.

De oplossing blijkt te liggen op het snijpunt van de lijnen (1) en (2). Uit de vergelijkingen blijkt, dat voor dit punt geldt:

$$x_A = 4, \quad x_B = 2$$

De behaalde winst is vlg (5) f 1400.

- 77 -

Men kan aan de figuur zien, dat in het algemene geval de oplossing zal liggen op het snijpunt van 2 lijnen; dat wil zeggen, dat dus slechts 2 beperkingen inderdaad actief zijn. In dit voorbeeld worden wezenlijke beperkingen opgelegd door de capaciteit en door de grondstof voor A; als één van deze beperkingen wordt verruimd kan meer winst worden gemaakt. De grondstof voor B echter is in voldoende mate aanwezig en levert geen beperking. Grafisch is direct in te zien, dat de grondstof voor B wel een beperking zou gaan worden, als de capaciteit zozeer zou toenemen, dat lijn (1) boven het snijpunt van (2) en (3) zou komen te liggen.

Het is evident, dat de grafische methode niet bruikbaar is voor een probleem met meer variabelen. Wij zoeken dus naar een algebraïsche aanpak en willen daarna een rekenautomaat inschakelen.

7.3. De substitutiemethode.

Toevoegen: verschilvariabelen y_1 , y_2 en y_3 die resp. aangeven: y_1 = hoeveelheid machineuren onbezet.
 y_2 = hoeveelheid grondstof A onbenut.
 y_3 = hoeveelheid grondstof B onbenut. $\left\| \begin{array}{l} y_i \geq 0 \end{array} \right.$

Omdat de situatie op een korte termijn wordt beschouwd, mag gesteld worden: y_1 , y_2 en y_3 leveren geen bijdrage aan W.

Het probleem wordt nu beschreven door de volgende vergelijkingen:

$$x_A + 2x_B + y_1 = 8 \quad (1)$$

$$x_A + y_2 = 4 \quad (2)$$

$$x_B + y_3 = 3 \quad (3)$$

$$W - 200x_A - 300x_B = 0 \quad (5)$$

Maximaliseer W (voor W wordt hierna x_0 gebruikt). Alle $x, y \geq 0$

Wij proberen eerst een toelaatbare oplossing te vinden en gaan dan stapsgewijs naar de optimale oplossing.

Daarbij baseren wij ons op de hoofdstelling van LP, die hier niet wordt bewezen (daarvoor: zie colleges prof. Benders).

Hoofdstelling LP:

Stel het aantal variabelen n (met inbegrip van de verschil-variabelen).

Stel het aantal beperkende voorwaarden m (waarbij $m < n$). Indien er een oplossing bestaat, dan bestaat er ook een basisoplossing, dat is een oplossing waarbij ten hoogste m variabelen een van nul verschillende waarde hebben. De overige $(n-m)$ variabelen hebben de waarde nul. De optimale oplossing is een basisoplossing.

Voor het beschouwde voorbeeld geldt:

$$n = 6, \quad m = 4$$

(of, als men (5) niet meerekent: $n = 5, m = 3$).

Zoek nu als eerste oplossing een basisoplossing, d.i. een oplossing waarbij 2 variabelen een waarde nul hebben.

Triviale eerste oplossing: $x_A = x_B = 0$.

Door de structuur van de vergelijkingen lezen we direct de waarde van de overige variabelen af (per regel slechts 1 variabele $\neq 0$; een aantal kolommen (de basis) bevat slechts 1 variabele)

$$y_1 = 8, y_2 = 4, y_3 = 3, x_0 = 0.$$

Dit betekent dus: niets produceren, geen grondstof of capaciteit gebruiken, opbrengst nul.

Wij zoeken nu naar een volgende basisoplossing; gezien de hoofdstelling zal één variabele, die nu nul is, een van nul verschillende waarde moeten krijgen ("in de oplossing komen"). Een andere variabele, die nu in de oplossing zit, zal nul moeten worden.

Breng x_B in de oplossing, omdat per eenheid B de bijdrage aan de winst het grootst is (immers: $300 > 200$; in het algemeen: kies de meest negatieve coëfficiënt in de laatste vergelijking).

Hoe ver kan x_B stijgen?

$$\text{Wat betreft vgl (1): } x_B \leq \frac{8}{2}$$

(immers: x_A is nog nul, y_1 mag niet negatief worden)

$$\text{evenzo door vgl (3): } x_B \leq 3$$

- 79 -

Merk op, dat vgl (2) geen beperking voor x_B levert. Het ligt nu voor de hand, binnen de 2 gevonden beperkingen het maximum van produkt B te produceren, d.w.z. kies $x_B = 3$. De stap, die wij nu gezet hebben is een logische stap: ga produkt B maken, zoek het knelpunt.

De tweede oplossing wordt dan:

$$x_A = 0, x_B = 3.$$

Hoe groot zijn de andere variabelen nu?

Is deze oplossing al optimaal?

Zo neen, wat is de volgende stap?

Om al deze vragen te kunnen beantwoorden gaan wij het stelsel vergelijkingen zodanig omvormen, dat weer dezelfde structuur ontstaat waaruit de gevonden basisoplossing rechtstreeks kan worden afgelezen. Ga daartoe als volgt te werk:

- ga na, welke vgl zojuist de bottle-neck leverde; dat is vgl (3)
- gebruik vgl (3) om de variabele, die in de oplossing is gebracht, uit te drukken in de andere variabelen:

$$x_B = 3 - y_3$$

- substitueer nu deze vorm in de andere vergelijkingen.

Dit levert, na herleiding:

$$x_A + y_1 - 2y_3 = 2 \quad (1)$$

$$x_A + y_2 = 4 \quad (2)$$

$$x_B + y_3 = 3 \quad (3)$$

$$x_0 - 200x_A + 300y_3 = 900 \quad (4)$$

Lees hieruit de tweede oplossing af:

$$x_A = y_3 = 0, x_B = 3, y_1 = 2, y_2 = 4$$

De interpretatie van deze oplossing is eenvoudig:

- gebruik alle grondstof voor B
- produceer dus 3 eenheden B
- gebruik dus slechts 6 uren capaciteit
- er blijven 2 uren capaciteit over
- alle grondstof voor A blijft ongebruikt.

- 80 -

Volgende stap: ga ook A produceren.

Immers: uit vgl (4) blijkt dat toename van x_A leidt tot toename van x_0 (en wel 200 per eenheid).

De verdere gang van zaken is precies als bij de vorige iteratie:

vgl(1) levert de sterkste beperking: $x_A \leq 2$.

Dus x_A komt in de oplossing, y_1 gaat er uit.

Uit vgl(1) volgt:

$$x_A = 2 - y_1 + 2y_3$$

Substitutie in de overige vgl. levert:

$$x_A + y_1 - y_3 = 2 \quad (1)$$

$$-y_1 + y_2 + 2y_3 = 2 \quad (2)$$

$$x_B + y_3 = 3 \quad (3)$$

$$x_0 + 200y_1 - 100y_3 = 1300 \quad (4)$$

Derde oplossing luidt dus:

$$y_3 = y_1 = 0, x_A = 2, y_2 = 2, x_B = 3$$

Volgende stap: y_3 in de oplossing.

Vgl(2) levert de beperking, dus y_2 wordt nul *)

Vgl(2) levert verder:

$$y_3 = \frac{2 + y_1 - y_2}{2}$$

zodat het stelsel vgl gaat luiden:

$$x_A + y_2 = 4 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 1 \quad (2)$$

$$x_B + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 = 2 \quad (3)$$

$$x_0 + 150y_1 + 50y_2 = 1400 \quad (4)$$

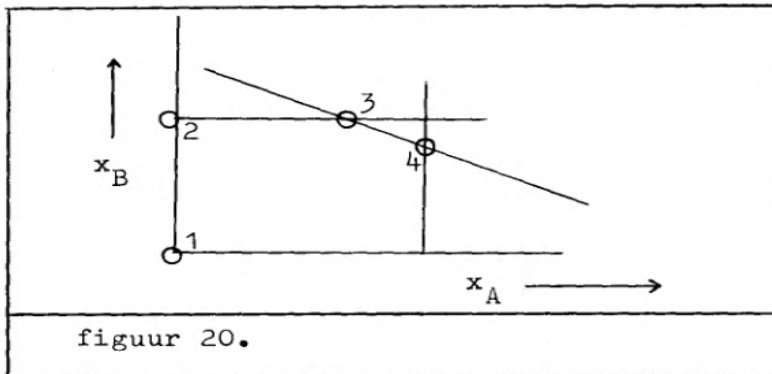
Vierde oplossing luidt:

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 1, x_A = 4, x_B = 2, x_0 = 1400.$$

Dit is tevens de optimale oplossing, want uit vgl(4) blijkt, dat x_0 niet verder vergroot kan worden (alle coëfficiënten ≥ 0). Dezelfde oplossing is reeds grafisch gevonden. Ook toen bleek: de marginale waarde van grondstof voor B is nul.

*) Bij deze stap worden uitsluitend positieve coëfficiënten beschouwd; vgl(1) wordt hier dus genegeerd.

De opeenvolgende oplossingen kunnen in de simplex worden aangegeven (figuur 20).



Ook deze substitutiemethode kan nog niet zonder meer in een computerprogramma worden vastgelegd.

7.4. De simplexmethode.

Indien men in tableauvorm de verschillende stellen vgl. naast elkaar zet, blijkt dat steeds het volgende tableau uit het vorige ontstaat door zodanig manipuleren van de vgl, dat er drie kolommen ontstaan, waarin per kolom één 1 staat op 3 verschillende plaatsen en verder nullen. Hiervoor kan de Gauss-Jordan transformatie worden gebruikt. Zo komt men tot de simplexmethode, die hierna in meer algemene termen zal worden beschreven. Aan de simplexmethode is de naam van G.B. Dantzig verbonden.

Het assortimentsprobleem kan worden geschreven in de volgende vorm:

$$\begin{aligned} A \cdot \underline{x} &\leq \underline{b} & (\underline{b} > 0) \\ \underline{x} &\geq 0 \\ \max \quad & \underline{c}^T \cdot \underline{x} \end{aligned}$$

Hierin is $\underline{c}^T \cdot \underline{x}$ de objektfunctie x_0 .

Hierin is A een matrix met m rijen en (n-m) kolommen. $\underline{x}$ is een kolomvector $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{c}^T$ is een rijvector.

[A is de matrix van de coëfficiënten van de vergelijkingen, $\underline{x}$ bevat de variabelen, $\underline{c}$ bevat de opbrengstgegevens]

Wij maken de eerste ongelijkheid tot gelijkheid door te schrijven:

$$A\underline{x} + \underline{y} = \underline{b}$$

waarin $\underline{y} \geq 0$

*) Pas op! Elders in deze syllabus wordt de notatie $\underline{x}$ gebruikt om een toevalsvariabele aan te duiden.

- 82 -

Hierin is $\underline{y}$ de vector van de m verschilvariabelen ("slack variables"), y_1 t/m y_m .

Verder wordt toegevoegd de vergelijking:

$$x_0 - \underline{c}^T \cdot \underline{x} = 0$$

Het stelsel kan als volgt worden voorgesteld:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ \hline 1 & 0 \dots 0 & -\underline{c}^T \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maximaliseer x_0

Uiteraard wordt met $\begin{pmatrix} x_0 \\ \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix}$ de vector van alle variabelen aangeduid.

[N.B. de onderste regel van de matrix mag alleen op deze wijze worden geschreven, als de verschilvariabelen geen aandeel leveren (positief dan wel negatief) in de objekt-functie].

Als basisoplossing kiezen we weer $\underline{x} = \underline{0}$. Hieruit volgt meteen:

$$\underline{y} = \underline{b} \quad \text{en} \quad x_0 = 0$$

Om de tweede oplossing te vinden, maken we gebruik van een methode die, vaak in minder geschematiseerde vorm, ook toegepast wordt bij het oplossen van een stelsel van p lineaire vergelijkingen met p onbekenden: de Gauss-Jordan transformatie. Wij lichten deze methode toe aan een numeriek voorbeeld voor

$p = 3$:

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \quad (2)$$

$$7x_1 - x_2 - x_3 = 2 \quad (3)$$

Laat (1) onaangetast. Vervang (2) door het resultaat van de operatie:

$$3 \times (2) - 2 \times (1)$$

- 83 -

Dit levert:

$$(3.2 - 2.3)x_1 + (3.1 - 2.4)x_2 + (-3.2 - 2.1)x_3 = -3.2 - 2.8$$

Vervang (3) door

$$3 \times (3) - 7 \times (1)$$

Dit levert:

$$(3.7 - 7.3)x_1 + (-3.1 - 7.4)x_2 + (-3.1 + 7.1)x_3 = 3.2 - 7.8$$

Delen we de resulterende vergelijkingen door 3, dan ontstaat:

$$\begin{aligned} \frac{3}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= \frac{8}{3} \\ \frac{3.2 - 2.3}{3}x_1 + \frac{3.1 - 2.4}{3}x_2 + \frac{3.2 - 2.1}{3}x_3 &= \frac{3.2 - 2.8}{3} \\ \frac{3.7 - 7.3}{3}x_1 + \frac{-3.1 - 7.4}{3}x_2 + \frac{-3.1 + 7.1}{3}x_3 &= \frac{3.2 - 7.8}{3} \end{aligned}$$

Het zogenaamde "pivot"-element is hier de coëfficiënt van x_1 in de eerste vergelijking. In de eerste kolom van coëfficiënten ontstaan nullen, alleen het pivot-element wordt 1.

Geven we de rijen van de matrix aan met index i en de kolommen met j en zij het pivot-element a_{rs} , dan wordt de volgende transformatieregel gesuggereerd:

1) voor de pivotrij, dus voor $i = r$:

$$a_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \quad (\text{dus } a_{rs}^1 = 1)$$

2) voor de andere rijen, dus voor $i \neq r$:

$$a_{ij} = \frac{a_{rs} a_{ij} - a_{is} a_{rj}}{a_{rs}} = a_{ij} - \frac{a_{is} a_{rj}}{a_{rs}}$$

voor de getallen, in de pivotkolom ($i \neq r, j = s$) volgt hieruit:

$$a_{is}^1 = 0$$

Het rechterlid wordt geheel analoog getransformeerd.

We zien, dat inderdaad de pivot-kolom na transformatie bestaat uit nullen, behalve een 1 op de plaats van het pivot-element.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{22}{3} \\ 0 & \frac{31}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{50}{3} \end{array}$$

Door het proces nog twee maal te herhalen (b.v. met pivot elementen a_{22} resp. a_{33}) vinden we

- 84 -

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

zodat de oplossing luidt $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dezelfde transformatievergelijkingen worden ook in de simplex methode gebruikt, zij het onder enige extra beperkingen.

In de eerste plaats eisen we zoals reeds op pag. werd gesteld dat het rechterlid positief blijft. Uit de vergelijking

$$b_r' = \frac{b_r}{a_{rs}}$$

volgt de voorwaarde $a_{rs} > 0$.

Uit de transformatie van de overige kentallen van $\underline{b}$

$$b_i' = b_i - \frac{a_{is} b_r}{a_{rs}}$$

volgt dat voor $a_{is} \leq 0$ aan de eis is voldaan.

Stellen we het rechterlid > 0 dan volgt dat ook voor positieve a_{is} geen moeilijkheden optreden, mits

$$\frac{b_i}{a_{is}} \geq \frac{b_r}{a_{rs}}$$

We kiezen daarom de pivotrij r zó, dat

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\}$$

In de tweede plaats eisen we, dat de volgende benadering een hogere opbrengst garandeert; noemen we het kental dat bij de vergelijking met x_0 behoort b_0 (in de startoplossing is deze variabele nul) dan volgt uit

$$b_0' = b_0 - \frac{-c_s b_r}{a_{rs}}$$

dat opbrengst-verhoging optreedt indien $c_s < 0$.

Samenvattend, wordt de keuze van de pivot als volgt bepaald:

- de kolom wordt gekozen uit die kolommen waarvan de coëfficiënt in de onderste rij negatief is (in de praktijk kiest men de meest negatieve)

- 85 -

- de rij wordt gekozen door de vergelijking

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\}$$

Kolom r en rij s bepalen samen de pivot a_{rs}

Gewoonlijk worden de opeenvolgende stappen weergegeven in het zogenaamde simplex-tableau. Dit is in het algemeen als volgt samengesteld:

x_0	y_1	y_m	x_1	x_{n-m}	b
0 ⋮ 0	I		A		$\underline{b}$
1	0	0	$-c^T$		0

Op de matrix binnen de omlijning wordt de transformatie uit- / dubbele gevoerd.

Het eerste tableau van ons voorbeeld, ziet er als volgt uit (geen productie; geen opbrengst)

x_0	y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	b
0	1	0	0	1	2	8
0	0	1	0	1	0	4
0	0	0	1	0	1	3
1	0	0	0	-200	-300	0

Pivot-keuze: $-300 < -200 \rightarrow$ pivotkolom is x_B
 $\frac{3}{1} = \min\left(\frac{8}{2}, \frac{4}{1}\right) \rightarrow$ pivotrij is rij 3 } $\rightarrow$ pivot is 1

Transformeren van de getallen in de matrix levert nu

x_0	y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	b
0	1	0	-2	1	0	2
0	0	1	0	1	0	4
0	0	0	1	0	1	3
1	0	0	300	-200	0	900

- 86 -

Oplossing: $y_1 = 2$, $y_2 = 4$, $x_B = 3$; opbrengst $x_0 = 900$.

Bepaal opnieuw de pivot: 1; transformatie geeft

x_0	y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	b
0	1	0	-2	1	0	2
0	-1	1	2	0	0	2
0	0	0	1	0	1	3
1	200	0	-100	0	0	1300

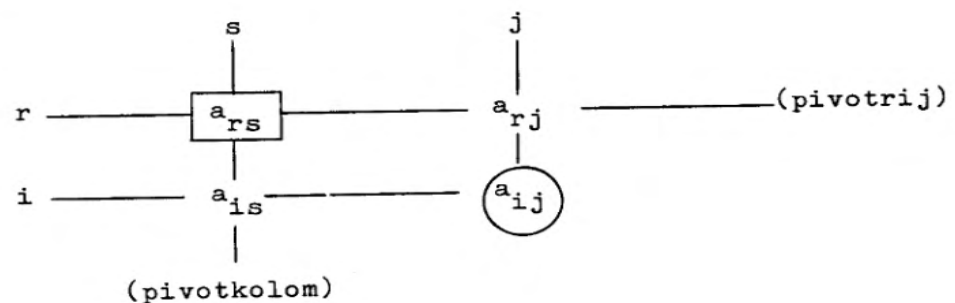
De volgende transformatie levert

x_0	y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	b
0	0	1	0	1	0	4
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	2
1	150	50	0	0	0	1400

Nu is er geen negatief element in de onderste rij meer aanwezig, zodat de optimale oplossing is bereikt:

$$y_3 = 1 \quad x_A = 4 \quad x_B = 1 \quad x_0 = 1400$$

- Merk op, dat de eerste kolom niet verandert tijdens het proces, in de praktijk wordt hij weggelaten.
- (Het is nuttig de verschillende stappen van de simplex-procedure te vergelijken met de grafische oplossing).
- De algemene transformatieregel kan men gemakkelijk onthouden aan de hand van het schema:



- 87 -

- Voor het convergentiebewijs wordt verwezen naar het college Optimaliseringsmethoden I (prof. Benders).
- De methode convergeert snel, ook problemen met zeer veel variabelen en vergelijkingen kunnen binnen aanvaardbare tijd worden opgelost.
- Soms vermeldt men "in de kantlijn" de variabelen, die in de basisoplossing voorkomen tezamen met hun c-waarde. Wij zullen dat hierna ook doen.

7.5. Het numerieke voorbeeld met simplexmethode.

Volledigheidshalve volgt hier nogmaals de behandeling van het numerieke voorbeeld volgens de simplexmethode.

Het eerste simplextableau ziet er als volgt uit:

in de opl.:		y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	
C	var.	0	0	0	200	300	
0	y_1	1	-	-	1	2	8
0	y_2	-	1	-	1		4
0	y_3	-	-	1		(1)	3 ←
	x_0	0	0	0	-200	-300	0

In de "kantlijn" zijn de variabelen vermeld, die in de basisoplossing voorkomen (d.w.z. niet à priori nul zijn gesteld). De waarde, die elke van deze variabelen in de oplossing aanneemt, kan men op de zelfde regel aflezen in de kolom. Variabelen, die niet in de kantlijn worden vermeld, hebben een waarde nul. Voor het gemak is in de kantlijn ook voor elk der genoemde variabelen de c-waarde nog eens vermeld. In het tableau vindt men dus de coëfficiënten van de vergelijkingen terug. Per kolom kan men daardoor precies aflezen, wat men moet "opofferen" indien men in de oplossing de waarde van de variabele, die bij deze kolom behoort, met 1 laat toenemen; alle andere variabelen zullen dan nl. van waarde moeten veranderen. Daardoor verandert ook de waarde van de winstfunctie. Deze verandert door de invloed van de toename van de "nieuwe" variabele, maar ook door de verandering van de "oude" variabelen. In de onderste rij is dan ook aangegeven, wat moet worden "opgeofferd" in eenheden van de objektfunctie (zodat een negatief bedrag een gunstige verandering aanduidt).

De eerste oplossing luidt:

$$\begin{aligned}x_A &= x_B = 0 \\y_1 &= 8 \\y_2 &= 4 \\y_3 &= 3\end{aligned}$$

Dit betekent: geen activiteit, $W = 0$.

Uit het tableau kunnen we aflezen: indien 1 eenheid van A in de oplossing wordt gebracht, moeten worden opge-

offerd: 1 eenheid van y_1 , d.w.z. 1 machineuur

1 eenheid van y_2 , d.w.z. 1 eenheid grondstof

-200 gulden, d.w.z. de winst zal toenemen met + f 200,--

Wat is nu de volgende stap?

Gezien de getallen in de indexrij proberen we x_B in de oplossing te brengen. Alle waarden a_{rB} rij > 0 .

De uitkomsten $\frac{b_r}{a_{rB}}$ zijn:

- voor de eerste rij $\frac{8}{2} = 4$, d.w.z. gezien de beschikbare machinecapaciteit kunnen niet meer dan 4 eenheden B gemaakt worden.
- voor de tweede rij $\frac{4}{0} = +\infty$, geen beperking.
- voor de derde rij $\frac{3}{1} = 3$; dit is tevens de laagste positieve uitkomst. De grondstof voor B vormt in deze oplossing de "bottleneck"; de derde rij is de centrale rij, de variabele y_3 wordt in de volgende oplossing nul gestel en verdwijnt uit de oplossing.

Volgens de gegeven regels ontstaat het tweede tableau:

in de opl:		y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	
C	var	0	0	0	200	300	
0	y_1	1	-	-2	①	-	2 ←
0	y_2	-	1	-	1	-	4
300	x_B	-	-	1	-	1	3
x_0		0	0	300	-200 ↑	0	+900

- 89 -

De tweede oplossing luidt:

$$x_A = y_3 = 0$$

$$y_1 = 2 \quad (\text{nog 2 machine-uren onbezet})$$

$$y_2 = 4 \quad (\text{alle grondstof A nog ter beschikking})$$

$$x_B = 3 \quad (3 \text{ eenheden B per dag produceren})$$

Uit dit tableau kan verder worden afgelezen

indien 1 eenheid y_3 in de oplossing wordt gebracht

- komen 2 machine-uren vrij
- wordt 1 eenheid B minder gemaakt
- neemt de winst met f 300,-- af.

Voor de volgende stap zal kolom x_A de centrale kolom worden. De uitkomsten $\frac{b}{a_{rA}}$ zijn:

eerste rij $2/1 = 2$ (gezien de nog beschikbare machine-uren kunnen max. 2 eenheden A worden toegevoegd).

tweede rij $4/1 = 4$ (grondstofbeperking)

derde rij geen beperking.

Dus is de eerste rij de centrale rij en zal y_1 , uit de oplossing verdwijnen; ook de machinecapaciteit is nu een "bottle-neck" geworden.

in de opl:		y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	
C	var	0	0	0	200	300	
200	x_A	1	-	-2	1	-	2
0	y_2	-1	1	(+2)	-	-	2 ←
300	x_B	-	-	1	-	1	3
	x_0	200	0	-100	0	0	1300

De 3e oplossing betekent dus: per dag 2A en 3B maken, winst 1300, geen machinecapaciteit over, geen grondstof B over.

In de kolom y_1 zien we, dat het vrijmaken van 1 machine-uur een verlaagde produktie van A en dus een verlaagde

- 90 -

winst ten gevolge heeft. Verder zien we, dat nog steeds verdere verbetering mogelijk is, en wel door y_3 weer in de oplossing te brengen. Het kleinste positieve quotiënt is $2/2 = 1$ (2e rij) en daarom zal y_2 uit de oplossing verdwijnen. We gaan dus meer A maken, ten koste van B; de bovengrens voor A wordt nu gesteld door de grondstofbeperkingen.

in de opl.:		y_1	y_2	y_3	x_A	x_B	
C	var	0	0	0	200	300	
200	x_A	-	+1	-	1	-	4
0	y_3	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1	-	-	1
300	x_B	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-	-	1	2
	x_0	+150	+50	0	0	0	1400

Het optimum is nu bereikt:

4 eenheden A winst f 1400,--
2 eenheden B

machinecapaciteit en grondstof A geheel verbruikt; grondstof B, beschikbare hoeveelheid niet opgebruikt.

Uit de indexrij kan men verder aflezen:

- een kleine vermindering van de machinecapaciteit zou f 150,-- per uur kosten.
- een kleine vergroting van de machinecapaciteit zou f 150,-- per uur opleveren
- een kleine verruiming van de hoeveelheid grondstof voor A zou per eenheid f 50,-- opleveren.* Deze waarden zijn de z.g. schaduw prijzen. Het gebruik van schaduw prijzen en de mogelijkheid om door het gebruik hiervan subsystemen een goede subdoelstelling te geven worden o.a. besproken door Stedry (1959).

* Als dit laatste geval zich nl. zou voordoen, zouden we nog iets meer A gaan maken en, tengevolge van de capaciteitsbeperking, minder B.

7.6. De MODI-methode.

De boven behandelde simplex-methode is een algemeen aanwendbare methode, die het uitgangspunt is geweest voor vele computerprogramma's.

Voor vele problemen uit de categorie "distributieproblemen" is een eenvoudiger methode bruikbaar, te weten de "MODI-methode". Bij deze problemen komt elk der variabelen slechts in 2 vergelijkingen voor en steeds met de coëfficiënt 1; het gaat om de reeds vermelde toewijzing van vraag en aanbod, waarbij beide in dezelfde eenheid kunnen worden uitgedrukt.

Een beschrijving van MODI zou in het kader van dit college te ver voeren; zie Gass, Metzger, Ferguson/Sargent, van der Veen.

8. Zeer beknopt overzicht gehele gebied.

Er bestaan verschillende varianten van het LP-probleem.

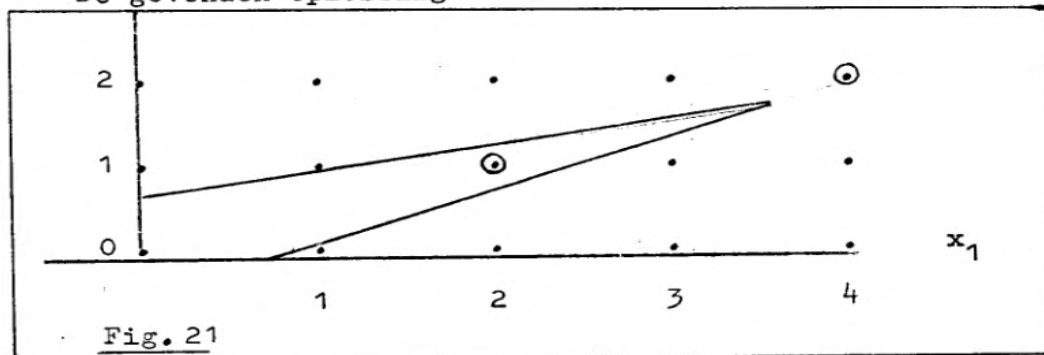
1. geheeltallige programmering;

hierbij worden voor sommige of alle variabelen slechts gehele getallen toegelaten; dit komt voor wanneer we van een bepaalde faciliteit of één of twee evt. maar nooit een tussenliggend aantal kunnen gebruiken. Denk bv. aan tankwagens, vliegtuigen, etc.

Het ligt voor de hand te trachten het probleem op de gebruikelijke manier op te lossen en vervolgens het eindelijke resultaat op gehelen af te ronden.

We vinden dan vaak een niet toegelaten oplossing die bovendien soms verre van optimaal is, zoals moge blijken uit onderstaande figuur.

De gevonden oplossing is een factor twee te hoog!



$$\begin{aligned} x_1 &= 3,6 \\ x_2 &= 1,6 \end{aligned} \rightarrow \underline{x} = (4,2) \quad \text{i.p.v. } (2,1)$$

Een speciaal geval van geheeltallige programmering is dat waarbij de variabelen slechts gelijk aan nul of aan één kunnen worden; de waarde van de term

$$a_{ij} \cdot x_j$$

is dan niet meer evenredig met x_j maar is òf nul òf gelijk aan a_{ij} afhankelijk van het al of niet in de oplossing voorkomen van x_j .

Deze situatie doet zich voor wanneer men faciliteit j òf geheel gebruikt òf in het geheel niet.

2. Stochastische programmering.

Hierbij laten we bepaalde onzekerheden toe in de waarden van onze coëfficiënten.

3. Niet lineaire programmering.

Soms laat de realiteit zich niet in een lineair model persen. Speciale technieken zijn (en worden) hiervoor ontwikkeld. Zie o.a. het college van prof. Benders.

4. Parametrische programmering.

Bij parametrische programmering brengt men via een parameter α variatiemogelijkheden aan, hetzij in de objektfunctie, hetzij in het rechterlid. Men vervangt bijvoorbeeld b door $(b + \alpha b')$ en vraagt de optimale oplossing als functie van α , bij voorkeur zonder de gehele simplex procedure een aantal malen te herhalen. Uitgaande van de optimale oplossing voor $\alpha = 0$ kan men dit probleem oplossen.

Computerprogramma's.

In veel rekencentra zijn programma's voor LP aanwezig. De meeste computerfabrikanten leveren bij hun "hardware" als "software" o.a. standaardprogramma's voor LP. Om de gedachten te bepalen:

- 94 -

Literatuuropgave LP.

- B = zelfde stof als in syllabus, evt. anders behandeld
 C = zelfde stof als in syllabus, meer populair behandeld
 D = zelfde stof als in syllabus alsmede verdere uitbreiding
 E = strakkere behandeling en verdieping
 F = aanbevolen voor verdere studie
 G = uitgewerkte voorbeelden
 x = aanbevolen
 xx = sterk aanbevolen
- } { als bij het college en de syllabus
 } { verduidelijking wordt gezocht.

1) R.G.D. Allen - Mathematical economics. Mc. Millan 1960	B	x
2) J.F. Benders - colleges THE	E,F	
3) E.H. Bowman en R.B. Fetter - "Analysis for production management". Irwin 1957.	B	
4) E.H. Bowman en R.B. Fetter - "Analyses of industrial operations" Irwin 1959 (bevat aantal "cases" van verschillende auteurs, o.a. Duckworth).	G	
5) W.E. Duckworth - "Wat is operationele research?" Marka nr. 12	C	x
6) R.T. Eddison e.a. - "Operational research in management" English Universities Press 1962.	C	x
7) R.O. Ferguson en L.F. Sargent - "Linear programming: fundamentals and applications". Mc Graw Hill 1958.	B,D,G	x
8) G.S. Galer - "Case study on optimum price - output decisions", opgenomen in Proceeding Productivity Techniques Conference van de Association of British Chemical Manufacturers.	G	
9) S.I. Gass - "Linear programming-methods and applications". Mc Graw Hill 1958, 1964.	E,F	
10) L.S. Goddard - "Mathematical techniques of operational research" Pergamon 1963.	E	
11) W.G. Jones en C.M. Rope - "Linear programming applied to production planning - a case study". O.R. Quarterly <u>15</u> (1964) 4, p. 293 - 302.	G	
12) E. Koenigsberg - "Some industrial applications of linear programming" O.R. Quarterly <u>12</u> (1961) nr. 2.	G	
13) J. Kriens - "Schema's ter oplossing van lineaire programmeringsproblemen" Stst. Neerl. <u>10</u> , p. 45 - 53.	B	
14) R.W. Metzger - "Elementary mathematical programming" Wiley 1958	B,D	
15) O. Müller - "Mathematische Programmierung in der Zementindustrie"	G	

- 95 -

Unternehmensforschung 8 (1964), 4, pag. 165 - 194.

16) P.H. Randolph - "A simple explanation of simplex calculations"	B	x
The Journal of Industrial Engineering IX (1958) nr. 3.		
17) T.L. Saaty - "Mathematical methods of OR" Mc Graw Hill 1959.	E,F	
18) M. Sasieni, A. Yaspan en L. Friedman - Operations research; methods and problems. Wiley 1961.	B	x
19) S.B. Smith - "Planning transistor production by linear programming" Operations Research <u>13</u> (1965) nr. 11, p. 132 - 139.	G	
20) J. Stringer en K.B. Haley - "The application of linear programming to a large-scale transportation problem" 1 st Intern. Conf. OR 1957.	G	
21) G.H. Symonds - "Linear programming": the solution of refinery problems" Esso Standard Oil Comp. 1955.	G	
22) H. Theil, J.C.G. Boot en T. Kloek - "Voorspellen en beslissen" Marka nr. 9.	B	x
23) S. Vajda - "Readings in linear programming" Wiley 1958.	B	x
24) S. Vajda - "Mathematical programming" Wesley 1961.	E	
25) Vazsonyi - "Scientific programming in business and industry" Wiley 1958.	C	
26) K.B. Williams en K.B. Haley - "A practical application of linear programming in the mining industry" O.R. Quarterly <u>10</u> , (1959)nr. 3	G	
27) R.L. Ackoff en M. Sasieni - "Fundamentals of operations research"	D	xx
28) F.S. Hillier en G.J. Lieberman - "Introduction to operations research".	D	xx
29) R. van der Leest - "Lineaire programmering in het bedrijf" Samson 1967.	D	xx
30) A.C. Stedry - "Budget control and cost behavior" Prentice-Hall 1960.	D	
31) B. van der Veen - "Introduction to the theory of operational research".	B	xx

III. METHODEN EN RESULTATEN VAN OR. ONDERZOEK EN BEHEERSING VAN PROCESSEN.

9. Karakterisering van afname en produktie.

Stromen van goederen en geld, soms ook stromen van mensen zijn in het bedrijfsleven essentiële verschijnselen. In die stromen komen reservoirs ofwel opstoppingen voor, die we aanduiden als voorraden ofwel als wachttijden. Voorraden en wachttijden bevinden zich altijd tussen een aanvoer en een afvoer; om de eerstgenoemde verschijnselen te kunnen begrijpen is het dus nuttig, eerst de processen van aanvoer en afvoer te beschouwen.

Bij een wachttijdproces geldt gewoonlijk (niet altijd!)
aanvoer = vraag (naar bepaalde service) (beïnvloedbaar)
afvoer = "produktie" (van die service) (rechtstreeks gestuurd)

Bij een voorraadprobleem geldt gewoonlijk:
aanvoer = produktie (van bepaalde goederen) (rechtstreeks gestuurd)
afvoer = afname, vraag (naar die goederen) (beïnvloedbaar)

Van de produktie en de afname willen we nu een globale omschrijving geven, die in staat stelt oorzaken van wachttijden en funkties van voorraden te begrijpen. Later zal op karakteristieken van produktie en afname nog verder worden ingegaan.

Eerste kenmerk: is de stroom continu of discontinu d.w.z. stootsgewijs. Wij noemen een produktiestroom continu als er op elk moment produktie kan plaats vinden; het oogstproces van bijv. tomaten is dus een discontinu, stootsgewijze "produktie". De aflevering door een elektrische centrale is continu, maar ook de bediening van klanten in een winkel noemen we continu. Op analoge wijze kan een afnameproces continu of discontinu zijn; wanneer op een montageband voor auto's slechts één dag per maand groene auto's worden gemaakt, is de vraag naar groene verf discontinu; de behoefte aan een reserveband is continu want (wanneer de auto rijdt) is er elk moment kans dat er een band klapt.

Produktie zowel als vraag kunnen, indien continu, als componenten hebben (zie figuur 22):

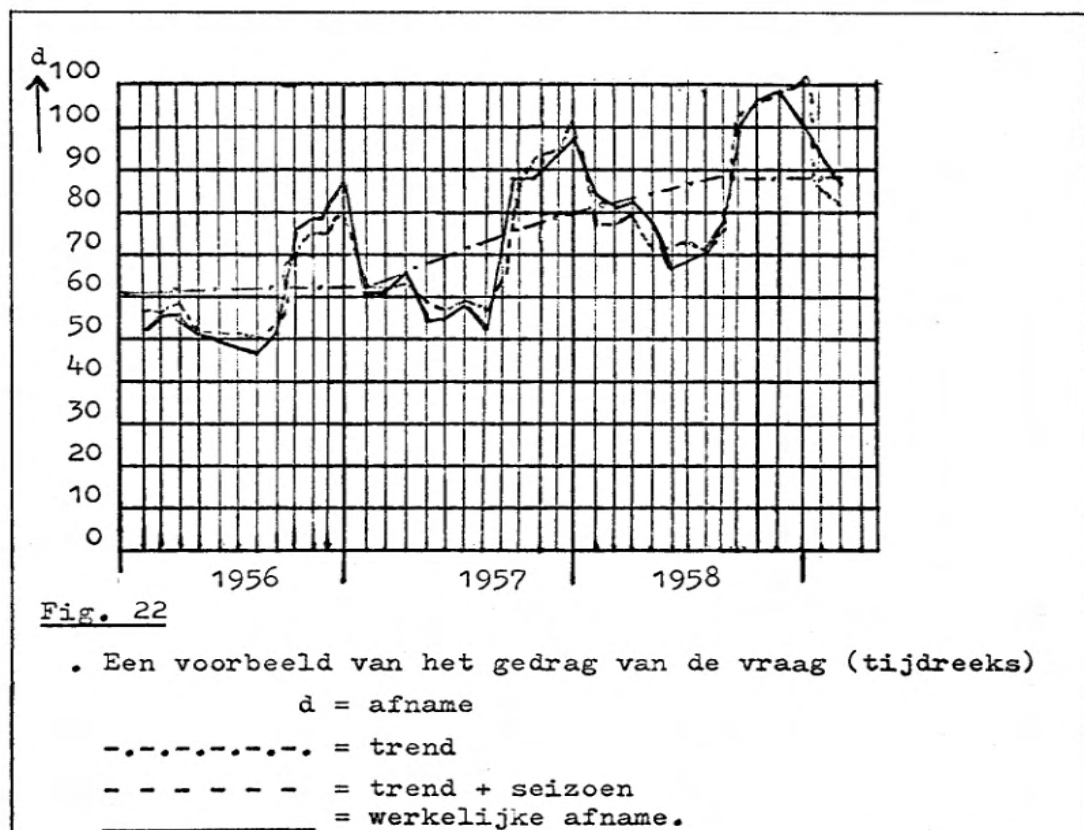
een trend - "smooth broad motion of the system over a long term of years" (Kendall); wat "lang" is hangt af van het doel van onze studie. Een duidelijke trend treedt op in bijv. de totale behoefte in Nederland aan elektrische energie, gloeilampen, drinkwater.

een cyclische beweging - een oscillatie van enige regelmaat om de trend. Seizoeneffect in de vraag naar stookolie en fotoluxlampjes, dag-nacht effect in de vraag naar stroom en water.

stochastische fluctuaties in bijv. de vraag naar gloeilampen, stroom, lasstaven.

incidentele effecten, bijv. t.g.v. bestedingsbeperking, aangekondigde verhoging omzetbelasting, huwelijk van een prinses, voetbalkampioenschappen, etc.

Als een productieproces verschillende fasen heeft, moeten produktie en afname per fase bekeken worden.



10. Oorzaken van wachttijden; funkties van voorraden.

Voor uitvoerige behandeling van dit onderwerp zij verwezen naar Van Hees en Monhemius (1964).

Wij zullen nu eerst een overzicht geven van de gangbare soorten wachttijd en voorraad, daarna zal elk van de gevallen kort worden toegelicht. In de praktijk is het reeds van groot belang, te weten met welk soort verschijnsel men te maken heeft.

In de kolom "componenten" zijn 5 gevallen onderscheiden. De component ontkoppelings-voorraad en -wachttijd is onderverdeeld in 6 groepen, afhankelijk van het type aan- en afvoer en afhankelijk van de technische mogelijkheid, het betrokken "produkt" op voorraad te maken, d.i. voordat een klantenorder is binnengekomen. Sommige produkten kunnen niet op voorraad worden gemaakt, hetzij omdat het produkt niet opgeslagen kan worden (elektrische stroom) hetzij omdat het produkt tevoren niet omschreven is (aanvraag voor telefoongesprek; een auto-reparatie).

- 99 -

O V E R Z I C H T V A N V O O R R A A D -
E N W A C H T I J D T Y P E S .

Component	Detaillering			Functie of oorzaak
Ontkoppelings- voorraad en - wachttijd		produkt kan niet op voor- raad liggen	produkt kan wel op voor- raad liggen	Ontkoppeling van aan- en afvoer met verschillend ritme
	aanvoer en afvoer beide continu	over-capaci- teit (geval 1a) loket- wachttijd (ge- val 1b)	buffervoorraad anticipatie- voorraad (geval 2)	
		aanvoer dis- continu, af- voer (continu) of om- gekeerd	perron- en stapelwacht- tijd (geval 3)	
	aan- en af- voer beide discontinu	als boven (geval 5)	als boven (geval 6)	
strategische voorraden	(geval 7)			dekking risico's als oorlog, staking
speculatieve voorraden	(geval 8)			speculatieve functie
completerings- wachttijd	(geval 9)			wachten op comple- tering
pijplijnvoor- raden	(geval 10)			ontstaan ten gevolg- van tijdsduur trans- port

- 100 -

Over de verschillende gevallen kan het volgende worden opgemerkt.

Geval 1a. Voorbeeld: elektrische centrale. Voorraad niet mogelijk, wachttijd niet toegestaan. Enige oplossing: voldoende overcapaciteit van de installatie om pieken op te vangen.

Geval 1b. Voorbeeld: telefooncentrale. Wachttijd toegestaan (binnen grenzen). Zie verder hoofdstuk 11. Oorzaak wachttijd: vorige klant in loket.

Geval 2. Voorbeelden: watertoren, gashouder, seizoenvoorraad steenkool of stookolie; totale produktie en totale voorraad van een afdeling. In deze syllabus is: buffervoorraad = voorraad om stochastische fluctuaties in produktie en/of afname op te vangen. anticipatie-voorraad = voorraad om voorspelbare fluctuaties op te vangen (bijv. seizoen).

Geval 3. Stapelwachttijd ontstaat bijv. als op een orderadministratie elk van de beambten een stapel orders behandelt en pas daarna de gehele stapel verder doorgeeft. Perronwachttijd ontstaat indien een bepaalde service (ophalen van post; vertrekken van een trein) slechts met een bepaalde frekwentie plaats vindt. (het loket is niet steeds geopend).

Geval 4. Zie hoofdstukken 13 en 14.

Geval 7. Gewoonlijk betreft dit voorraden van essentiële grondstoffen.

Geval 9. Een produkt wacht (op aanvang montage, op verzending), een karwei wacht (op verdere voortgang) omdat de zaak nog niet compleet is; een ander onderdeel, een andere handeling moeten nog worden voltooid. Andere naam: touringcarwachttijd.

Geval 10. Voorbeeld: goederen in schip onderweg naar klant.

Stel dat in het magazijn van een bepaalde groep eindprodukten de "voorraad" oploopt. Het is nu van groot belang te weten: welk type voorraad of wachttijd is dit? Betreft het een buffervoorraad (doordat klantenvraag toevallig laag) dan moeten wij heel anders reageren dan wanneer het completeringswachttijd is, doordat bijv. het

- 101 -

verpakkingsmateriaal nog niet is aangekomen. Bij een verkoopmaatschappij zal men er op attent moeten zijn, dat waarschijnlijk in het magazijn zelf vooral loketwachtijd optreedt, terwijl op de kantoren stapelwachtijd optreedt. Soms zijn deze wachttijden zo hoog, dat de bewerkings-tijd zelf verwaarloosd kan worden. In de praktijk heeft men vaak nog onvoldoende overzicht over de opbouw van voorraden en wachttijden.

Er moet tenslotte op gewezen worden, dat de "componenten" niet altijd netjes gescheiden voorkomen. Een bepaalde voorraad onderdelen "achter" een onderdelenfabriek kan bijv. tegelijkertijd twee functies vervullen: seriegrootte-voorraad (voor elk van de onderdelen afzonderlijk) en buffervoorraad (voor de capaciteit als geheel).

11. Verklaring, berekening en bestrijding van loketwachttijden.

Inleiding. In hoofdstuk 10 werd de loketwachttijd geïntroduceerd. Het zal blijken, dat de karakterisering, die daar gebruikt werd (aan- en afvoer continu) bij verdere behandeling wel problemen oplevert. Niet voor alle "loketwachttijdproblemen" is de aanvoer "continu". Wel zullen we steeds als loketwachttijd aanduiden die wachttijd die ontstaat door een gebrek aan afstemming van aanvoer en afvoer: stootsgewijze (discontinu) aanvoer interpreteren we als het binnenkomen van meerdere klanten tegelijk als een groep. De door dit effect veroorzaakte wachttijd is de stapelwachttijd.

Uiteraard gaan beide gevallen in elkaar over en komen ze soms ook gecombineerd voor. Wiskundig gezien kunnen problemen van perronwachttijd of stapelwachttijd worden geformuleerd als loketproblemen. Bij het analyseren in de praktijk van wachttijdproblemen is het toch nuttig, het onderscheid tussen beide wachttijdtypes te maken. Enkele voorbeelden van loketwachttijd:

- kapotte draaibank wacht op reparateur;
- klant wacht op bediening in restaurant of in winkel;
- karwei in machinefabriek wacht op beurt bij freesbank;
- auto's wachten voor tolhek;
- arbeiders wachten voor gereedschapsloket;
- schepen wachten in haven op lossen;
- vliegtuigen wachten op beurt om te mogen landen.

Verklaring paradox. Door een eenvoudige simulatie kan het verschijnsel loketwachttijd plausibel gemaakt worden. Stel: bij een postorderbedrijf komt iedere ochtend met de post een lading orders binnen; beschouw elke lading als een klant. Elke "klant" heeft een aantal uren bediening (bedieningstijd) nodig door magazijnbediende (het loket). Elke dag telt 8 werkuren.

- 103 -

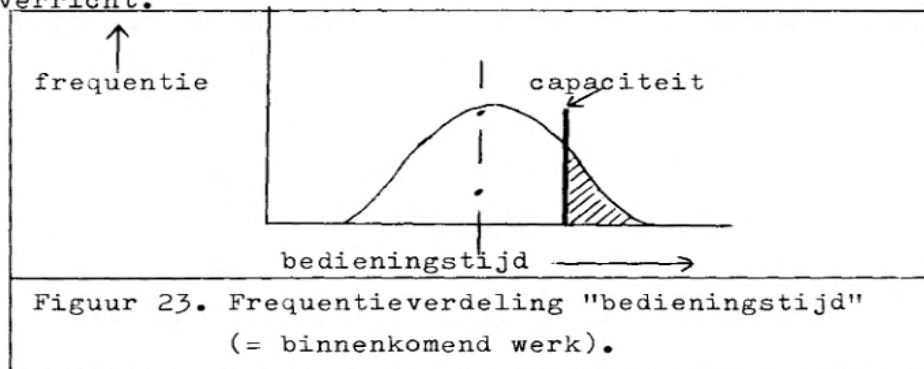
Dag nummer	Hoeveelheid binnenkomend werk	beginvoorraad werk	eindvoorraad werk(=wachttijd)
1	5,0 uren	5,0 uren	-
2	7,1 uren	7,1 uren	-
3	10,4 uren	10,4 uren	2,4 uren
4	7,8 uren	10,2 uren	2,2 uren
5	5,3 uren	7,5 uren	-
.....			
100			
Totaal	760		195

De eindvoorraad werk is tevens de wachttijd voor de volgende "klant".

Hoewel het personeel niet 100% bezet is (bezettingsgraad

$r = \frac{760}{800} = 95\%$) ontstaan toch wachttijden voor de orders; oorzaak: spreiding in de hoeveelheid werk (= "de bedieningstijd van de klant") van dag tot dag.

Door de frequentieverdeling van de "bedieningstijden" te tekenen en daarin de capaciteit van het loket aan te geven wordt de situatie verder duidelijk; wij tekenen dan immers de frequentieverdeling van "wat per dag binnenkomt" en tekenen daarin de bovengrens die aangeeft wat maximaal per dag kan worden verricht.



Uit deze beschouwing volgt reeds kwalitatief:

- hogere bezettingsgraad geeft een hogere wachttijd
- hogere spreiding in bedieningstijd eveneens

Merk ook op dat uit de tabel blijkt:

- loketwachttijden fluctueren van dag tot dag
- opeenvolgende wachttijden zijn niet van elkaar onafhankelijk (klontereffect). Indien men op 100 opeenvolgende dagen

de wachttijd meet, heeft men dus geenszins 100 onafhankelijke metingen van de wachttijd; dit effect is sterker bij hogere r .

Karakteriseren loketwachttijdprobleem.

In het algemeen wordt de situatie bepaald door:

- 1) Het patroon van binnenkomst van de klanten. Gewoonlijk beschouwd: frequentieverdeling van het interval tussen twee opeenvolgende binnenkomsten. Deze verdeling is lang niet altijd stationair; de verwachte waarde vertoont vaak een trend of een cyclisch patroon (bijv. binnenkomst klanten bij supermarkt); over een korte periode kan veelal een stationaire verdeling worden verondersteld. Opeenvolgende intervallen kunnen onderling onafhankelijke trekkingen zijn, maar ook kan autocorrelatie optreden of samenhang met grootheden als de rijlengte (kapperzaak) of de bedieningstijd van de voorafgaande klant (spreekuur tandarts; planning). De variatiecoëfficiënt van de frequentieverdeling van binnenkomstintervallen noemen wij C_{SB}

$$C_{SB} = \frac{\sigma_B}{\mu_B}$$

Voor een geheel regelmatige binnenkomst is $C_{SB} = 0$.

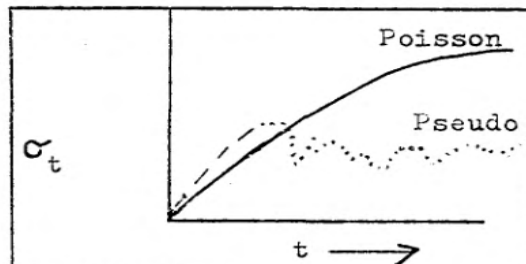
Indien het aantal binnenkomsten per tijdeenheid een Poissonverdeling volgt, is de frequentieverdeling van de binnenkomstintervallen negatief exponentiëel, dus $C_{SB} = 1$. Zie appendix C en D.

Een Poissonverdeling treedt op als het aantal potentiële klanten groot is, terwijl voor elk van de klanten een constante kans bestaat dat hij zich in een interval Δt bij de rij zal aansluiten. De Poisson-aanname leidt tot hanteerbare berekeningen en is bovendien in vele praktijkgevallen gerechtvaardigd. Door Cox en Smith is aangetoond, dat een negatief exponentiële verdeling van binnenkomstinterval snel benaderd wordt door een proces, dat ontstaat als optelling van reeksen gebeurtenissen met ieder voor zich een constant interval θ_i , mits alle θ_i verschillen en θ_i/θ_j irrationaal is voor $i \neq j$.

Het onderscheid met een echt Poissonproces is echter het volgende. Indien σ_1 = spreiding in het aantal binnenkomsten per periode van lengte 1, dan geldt voor een echt Poissonproces:

$$\sigma_t = \sigma_1 \sqrt{t}$$

Voor het pseudo-Poissonproces geldt dit natuurlijk niet. Vooral bij hoge bezettingsgraad zal een pseudo-Poisson proces dus resultaten geven, die gunstiger zijn dan voor een echt Poisson-proces.



Figuur 24. Poisson en pseudo-Poisson

Numeriek voorbeeld vlg. Cox en Smith:

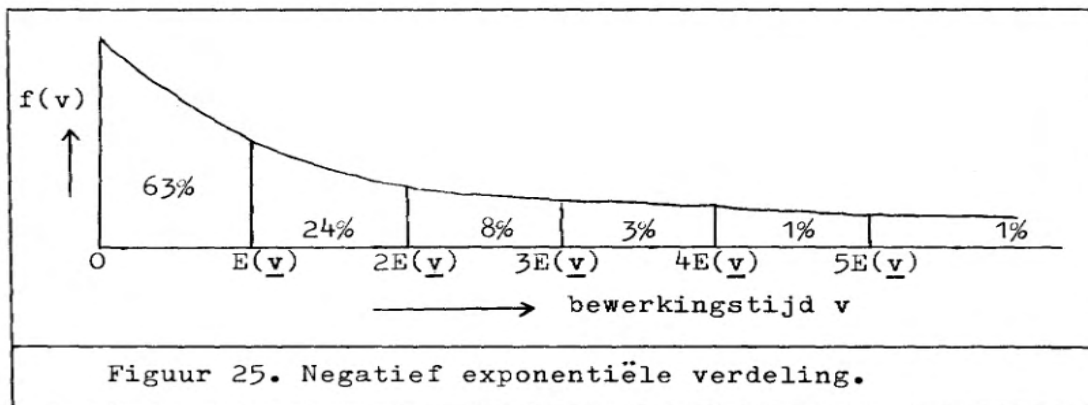
gesommeerde aantal reeksen	0 waarden, in 2 decimalen	neg.exp. als benade- ring voor verdeling interval:
4	1,00;1,13;1,28;1,35	praktisch bruikbaar
4	1,00;1,13;3,28;6,89	te ruw
10	1,00;tot 2,64	vrijwel identiek

Voorbeelden van echte Poissonprocessen zijn:

- binnenkomen telefoongesprekken bij een centrale gedurende een beperkt tijdvak
- breken van persgereedschap door afwijkingen in de persmassa
- spijker in autoband

2) Het patroon van de bedieningsduur.

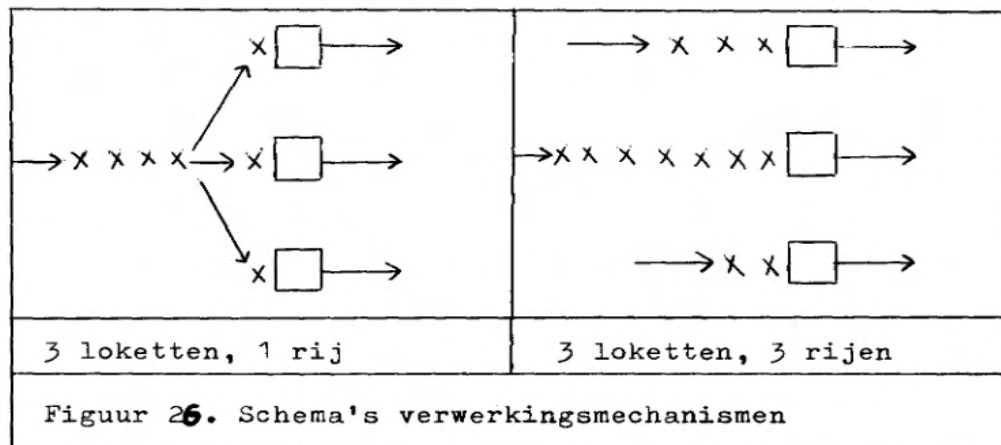
T.a.v. frequentieverdeling van de bewerkingstijd/gelden $\angle v$ dezelfde opmerkingen als t.a.v. de freq. verd. van het binnenkomstinterval. De variatiecoëfficiënt heet nu C_{SV} ; in berekeningen worden vaak de extreme waarden $C_{SV} = 0$ of $C_{SV} = 1$ gebruikt.



3) Het verwerkingsmechanisme (de bedieningsinstallatie).

Hier doen zich vragen voor als de volgende:

- hoeveel fasen van bewerking zijn er ?
- per fase: hoeveel loketten staan er parallel?
- kan elke klant aan elk loket bediend worden?
- is er één wachtrij voor alle loketten gezamenlijk (kapper) of is er een rij per loket (station); is in dit laatste geval "jockeying" (verwisselen van rij) mogelijk?
- is er een beperking voor de lengte van de wachtrij?



4) De rijvorming. Welke prioriteitsregels worden gehanteerd?

Als resultaat van de wachttijdberekeningen wordt veelal verlangd:

- het verwachte aantal wachtende klanten
- het verwachte aantal klanten in het systeem (met inbegrip van de klant, die bediend wordt), $E(n)$. [let goed op het verschil tussen deze beide aantallen].

- 107 -

- de verwachte wachttijd, $E(\underline{w})$
- de verwachte doorlooptijd (bewerkingstijd + wachttijd)
- de kans om te moeten wachten ofwel wachtkans, $P[\underline{w} > 0]$
- de kansverdeling voor de wachttijd en de lengte van de wachtrij.

Al deze grootheden kunnen soms een functie van de tijd zijn.

Een speciaal geval als voorbeeld.

In appendix H worden berekeningen uitgevoerd voor een wachtsituatie die als volgt is gekarakteriseerd:

- binnenkomstintervallen en bedieningstijden zijn onafhankelijke trekkingen uit een stationaire negatief exponentiële verdeling, dus $C_{SB} = C_{SV} = 1$
- 1 fase, 1 loket
- voor de lengte van de wachtrij geldt geen beperking
- bediening in volgorde van binnenkomst
- de toestand van statistisch evenwicht is bereikt, d.w.z. P_n (definitie hieronder) is niet meer een functie van de tijd.

Indien

n = het aantal klanten, dat zich op een bepaald moment in het systeem bevindt (met inbegrip van de klant, die bediend wordt)

P_n = de kans, dat een waarnemer, die op een willekeurig moment gaat kijken, de toestand n aantreft

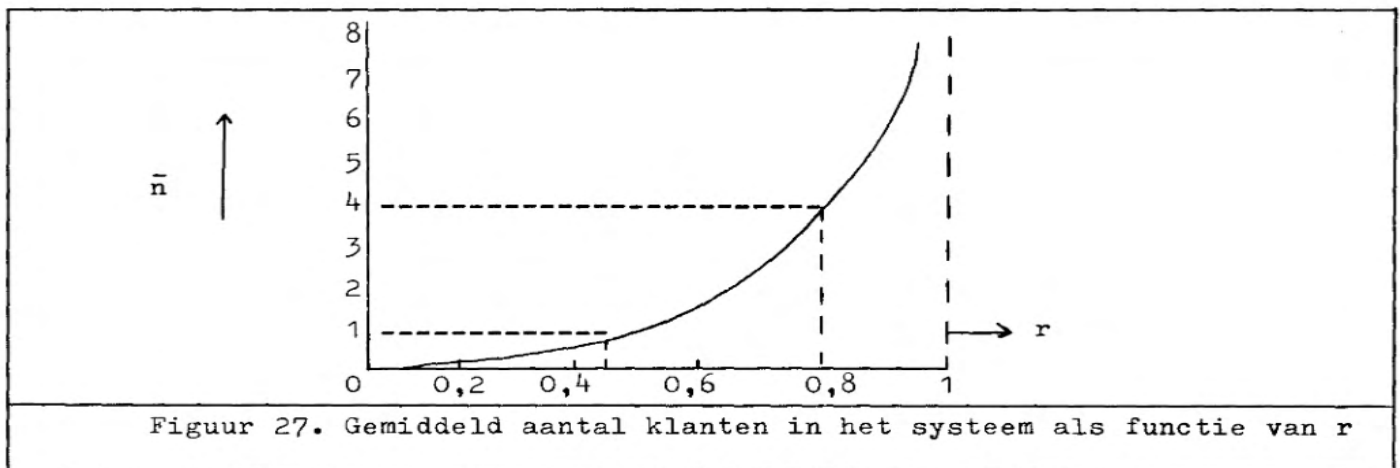
r = bezettingsgraad (def.: zie app. H)
dan wordt in app. H aangetoond:

$$P_n = (1-r) r^n$$

$$E(\underline{n}) = \frac{r}{1-r}$$

$$\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} = \frac{r}{1-r}$$

Voor toenemende r zal het gemiddeld aantal mensen in het systeem blijkbaar zeer sterk toenemen.



Figuur 27. Gemiddeld aantal klanten in het systeem als functie van r

$r =$	0,5	0,8	0,9	0,95	0,99
$\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} =$	1,0	4,0	9,0	19,0	99,0

Bedenk: de verwachte doorlooptijd door het systeem

$$DLT = E(\underline{w}) + E(\underline{v})$$

Gemakkelijk kan verder nog worden aangetoond:

$$P(\underline{n} > N) = r^{N+1}$$

Voor $r = 0,8$ levert dit:

$N =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(\underline{n} > N) =$	0,8	0,64	0,512	0,41	0,328	0,26	0,21	0,168	0,134	0,107

Voor een praktijkvoorbeeld zie o.a. Sittig (1955).

(spiebaanfreemachine).

Zonder bewijs geven we tenslotte nog:

$$P(\underline{w} > w) = re^{-w/x}$$

$$x = \frac{E(\underline{v})}{(1-r)}$$

$$w_d = P[\underline{w} > 0] = r$$

Globaal overzicht meest gangbare resultaten.

Een aantal goed hanteerbare oplossingen voor verschillende gevallen is reeds beschikbaar in de vorm van formules, soms zelfs reeds tabellen en grafieken. Het is goed, van die resultaten enig overzicht te hebben en te weten, wat voor de beschouwde gevallen de voornaamste conclusies zijn. Een vollediger overzicht wordt gegeven door Saaty.

Wat hierna in deze paragraaf volgt geldt uitsluitend onder de volgende veronderstellingen (tenzij voor een bepaald geval uitdrukkelijk anders is vermeld):

- er is 1 fase van bediening
- binnenkomstintervallen en bewerkingstijden zijn onafhankelijke trekkingen uit twee stationaire frequentieverdelingen
- het statistisch evenwicht is bereikt
- er is geen enkele "elasticiteit" of aanpassingsvermogen in het systeem
- de prioriteitsregel is "FIFO" ("first in first out")
- er is onbeperkte wachtruimte

Bedenk: wat hieronder volgt is geenszins "de wachttijdtheorie"; het gaat slechts om enkele resultaten van de wachttijdtheorie voor speciale gevallen.

Wij splitsen de beschouwde gevallen in 2 categorieën:

- het aantal aspirant-klanten is klein; het klassieke voorbeeld hiervan is het meermachinebedieningsprobleem (1 man bedient een aantal half-automatische machines)
Ander voorbeeld: een ober in een restaurant.
- het aantal aspirant-klanten is groot en mag onbeperkt worden verondersteld.

Wij zullen eerst de tweede en daarna de eerste categorie nader bezien. De hoofdtabel geeft een overzicht van de verschillende gevallen. Daarna volgen enkele tabellen en toelichtingen.

In de tabellen is

c = aantal loketten parallel

H O O F D T A B E L

- 110 -

Groot aantal klanten

	Binnenkomst regelmatig $C_{SV} = 0$	Binnenkomst Poisson $C_{SV} = 1$
$c = 1$	1) C_{SV} willekeurig Empirische formule Cox (1955) $E(\underline{w}) = \left[\frac{r}{2(1-r)} C_{SV}^2 - 0,6(r-0,1) \right] E(\underline{v})$ $E(\underline{v}) = ar$ $a = \text{interval van binnenkomst}$ Redelijke benadering voor $r > 0,5$; $E(\underline{w}) > 0,1E(\underline{v})$ Zie pag.111 "Tabel Cox" Zie pag.111 "Tabel Kendall" voor $C_{SV} = 1$	2) C_{SV} willekeurig Pollaczek: $\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} = \frac{r}{2(1-r)} (1 + C_{SV}^2)$ 3) $C_{SV} = 0$, Crommelin $\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} = \frac{r}{2(1-r)}$ Shelton: wachtkans ,fig. 4 freq.verd. $\underline{w}$,fig. 4 $E(\underline{w})$,fig. 11 4) $C_{SV} = 1$, Erlang $\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} = \frac{r}{1-r}$ Wachtkans = r $E(\underline{w})$: Shelton fig. 1
$c \geq 1$	5) Tabel Kendall 1953 voor $C_{SV} = 1$ (pag. 111) Zie ook Kendall voor uitkomsten wachtkans en variantie wachttijd. Uit eigen metingen blijkt, dat zelfs voor $C_{SV} = 0,15$ de freq. verdeling van de wachttijden, voor zover > 0, vrijwel negatief exponentieel verloopt.	6) $C_{SV} = 0$ Crommelin (1934) Shelton: $E(\underline{w})$ fig. 11 freq.verd. $\underline{w}$ } fig.4-10 wachtkans Zie ook tabel pag.112 voor $E(\underline{w})$ 7) $C_{SV} = 1$ Erlang Zie o.a. Sas Sasieni e.a. Shelton: W_d fig 2 $E(\underline{w})$ fig 1 Zie ook tabe pag. 112 voo $E(\underline{w})$. Zie f mules op pa $P[\underline{w} > w] = W_d e^{-x}$ $x = \frac{E(\underline{v})}{(1-r)c}$
	Klein aantal klanten; machinelooptijd neg. exp.	
	$C_{SV} = 0$	$C_{SV} = 1$
$c = 1$	8) Anson tabel 1	9) Anson tabel 2
$c \geq 1$	10)	11) Tabellen Peck-Hazelwood Tabellen Descloux

- 111 -

Tabel Cox . Geval 1 . In de tabel is vermeld: $E(\underline{w})/a$					
$\begin{matrix} \diagdown \\ r \end{matrix} \begin{matrix} c_{SV} \end{matrix}$	0,20	0,50	0,60	0,80	1,00
0,3				0,01	0,03
0,4				0,03	0,06
0,5			0,02	0,06	0,13
0,6			0,05	0,14	0,27
0,7		0,08	0,14	0,32	0,56
0,8		0,23	0,37	0,77	1,3
0,85	0,02	0,41	0,64	1,2	2,0
0,90	0,08	0,80	1,2	2,2	3,6
0,95	0,26	2,0	3,0	5,4	8,5

Tabel Kendall . Geval 5 . In de tabel is vermeld: $E(\underline{w})/E(\underline{v})$			
$\begin{matrix} \diagdown \\ r \end{matrix} \begin{matrix} c \end{matrix}$	1	2	3
0,1			
0,2	0,01		
0,3	0,04		
0,4	0,12	0,02	0,01
0,5	0,26	0,06	0,02
0,6	0,48	0,15	0,07
0,7	0,88	0,33	0,17
0,8	1,7	0,71	0,41
0,9	4,2	1,9	1,2

- 112 -

Tabel Erlang en Crommelin.								
Tabel voor $\frac{E(w)}{E(v)}$, $C_{SB} = 1$. In elk vakje staan steeds 2 gegevens; het bovenste geldt voor $C_{SV} = 1$ het onderste geldt voor $C_{SV} = 0$								
r \ c	1	2	4	5	8	10	20	40
0,1	0,11 0,056	0,01 0,01	- -	- -	- -	- -	- -	- -
0,2	0,25 0,12	0,04 0,02	- -	- -	- -	- -	- -	- -
0,3	0,43 0,21	0,10 0,06	0,01 0,01	0,01 -	- -	- -	- -	- -
0,4	0,67 0,33	0,19 0,10	0,04 0,02	0,02 0,01	- -	- -	- -	- -
0,5	1,0 0,50	0,33 0,18	0,09 0,05	0,05 0,03	0,01 0,01	0,01 -	- -	- -
0,6	1,5 0,75	0,56 0,29	0,18 0,10	0,12 0,07	0,04 0,03	0,03 0,02	- -	- -
0,7	2,3 1,2	0,96 0,49	0,36 0,19	0,25 0,14	0,11 0,06	0,07 0,04	0,02 0,01	- -
0,8	4,0 2,0	1,78 0,90	0,75 0,39	0,55 0,29	0,29 0,15	0,20 0,11	0,06 0,04	0,02 0,01
0,9	9,0 4,5	4,3 2,1	2,0 1,0	1,5 0,78	0,88 0,45	0,67 0,34	0,28 0,14	0,10 0,06

De klassieke Erlang - formule luidt: (voor geval 7)

$$\frac{E(w)}{E(v)} = \frac{1}{c^2(1-r)^2} \cdot \frac{(rc)^c}{(c-1)!} p_0$$

$$\text{waarin } [p_0]^{-1} = \frac{1}{c(1-r)} \cdot \frac{(rc)^c}{(c-1)!} + \sum_{i=0}^{c-1} \frac{(rc)^i}{i!}$$

Door Bailey is echter opgemerkt, dat de bovenstaande formule ook als volgt geschreven kan worden; de berekening is dan veel eenvoudiger

$$\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} = \left\{ c(1-r) \left[1 + \frac{(1-r)(1-P(c;cr))}{p(c;cr)} \right] \right\}^{-1}$$

Hierin is

$$p(c;cr) = \frac{e^{-cr}(cr)^c}{c!}$$

$$P(c;cr) = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{e^{-cr}(cr)^i}{i!}$$

Waarden voor p en P zijn rechtstreeks af te lezen uit tabellen voor de Poissonverdeling resp. de cumulatieve Poissonverdeling.

Zo geldt ook voor de wachtkans $W_d = P[\underline{w} > 0]$:

$$W_d = \left\{ 1 + \frac{(1-r) \{1-P(c;cr)\}}{p(c;cr)} \right\}^{-1}$$

Voor het aanloopverschijnsel bij $C_{SV} = 0$ zie grafiek bij Shelton; volgens Morse is de tijd die verloopt tot het bereiken van het statistisch evenwicht evenredig met

$$\frac{1}{(1-r)^2}$$

Enkele opmerkingen over meermachinebediening.

Zie gevallen 8 t/m 11 uit hoofdtabel.

In alle gevallen wordt verondersteld dat de looptijden van de "machines" negatief exponentieel verdeeld zijn, hetgeen overeenkomt met $C_{SB} = 0$.

De veel voorkomende complicatie van "bijkomend werk" voor de bediende wordt besproken door Benson en door Anson.

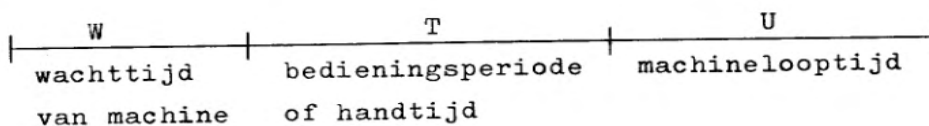
De ronde-bediening wordt o.a. behandeld door Wijvekate en door O'Connor (een benadering!). De veronderstelling $C_{SB} = 1$ mag gemaakt worden zolang ($\checkmark$ van de machine-looptijd) $> E(\underline{v})$. De invloed van C_{SV} blijkt klein te zijn. Voor de situatie meermachinebediening volgt hieronder nog een aantal eenvoudige formules, die nodig zijn om met de tabellen van Peck en Hazelwood te kunnen werken; de notatie is aan de tabellen ontleend.

- 114 -

M = aantal samenwerkende bedienden

N = Population = aantal machines

W, T en U zijn de onderdelen van de machinecyclus.



$$X = T / (U + T) \quad (\text{ingang van de tabel})$$

$$F = (T + U) / (U + W + T) \quad (\text{af te lezen})$$

$$MU = \text{"machine utilisation"} = U / (U + W + T)$$

$$OU = \text{"operator utilisation"} = \frac{N}{M} \cdot T / (U + W + T)$$

Eenvoudig kan nu worden afgeleid:

$$M U = F (1 - X)$$

$$O U = \frac{N}{M} F X$$

Rekenvoorbeeld 1. Cox.

1 loket, $C_{SB} = 0$, interval $a = 1$ dag.

Per dag gemiddeld 1000 orders binnen, $\lambda = 500$, dus $C_{SV} = 0,5$.

Stel capaciteit is 1050 orders per dag, $r = 0,95$.

Uit tabel blijkt $E(\underline{w}) = 2,0$ a. Veelal is dat niet aanvaardbaar en zal men maatregelen treffen.

Stel, er bestaan nog 5 van dergelijke loketten. Stel bovendien: binnenkomstpatronen onafhankelijk. Na concentratie tot 1 loket is dan:

$$r = 0,95; \mu = 6000 \text{ orders, } \lambda = 500 \sqrt{6}, C_{SV} = 0,2.$$

Nu is $E(\underline{w}) = 0,26$ a.

Rekenvoorbeeld 2. Erlang.

Eerst 4 keer situatie: 1 loket; $r = 0,7$; $E(\underline{v}) = 3$ uur.

$$C_{SB} = C_{SV} = 1$$

$$E(\underline{w}) = \frac{r}{1-r} E(\underline{v}) = 7 \text{ uur.}$$

$$E(\underline{w}) + E(\underline{v}) = 10 \text{ uur.}$$

Nu centraliseren, 1 wachtrij voor 4 loketten; nog steeds

$$r = 0,7 \text{ en } E(\underline{v}) = 3 \text{ uur.}$$

- 115 -

Volgens tabel is $E(\underline{w}) = 0,36$ $E(\underline{v}) = 1,03$ uur.

$E(\underline{w}) + E(\underline{v}) = 4,08$ uur.

Nu concentreren, 1 snel loket, $E(\underline{v}) = 0,75$ uur.

$E(\underline{w}) = 1,75$ uur.

$E(\underline{w}) + E(\underline{v}) = 2,5$ uur.

Dus: concentratie pas echt zinvol als r laag is en dus
 $w \approx v$.

Prioriteitsregels.

Tot dusver werd als rijdiscipline verondersteld:

in volgorde van binnenkomst bij het loket.

Vele andere voorrangsregels echter zijn denkbaar
en worden in de praktijk gebruikt.

Verandering van voorrangsregel betekent ook verandering van de
frequentieverdeling van de wachttijden van de klanten.

De verwachte waarde $E(\underline{w})$ wordt beïnvloed, als men een voorrangs-
regel toepast, waarin v voorkomt.

Door Cobham en Phipps zijn analytische berekeningen gegeven
voor situaties met voorrangsregels. Door Steutel en Cox-Smith
zijn hiervan verdere uitwerkingen gemaakt.

In het kader van dit college is het alleen mogelijk de
volgende conclusies te geven:

- geeft men steeds voorrang aan de klant met de kortste
bewerkingsduur, dan daalt de gemiddelde wachttijd aan-
zienlijk (dit heeft alleen zin bij onderling onafhan-
kelijke klanten, anders toch complementeringswachttijd)
- door een tweedeling in een categorie "groot" en een
categorie "klein" is vrijwel hetzelfde effect reeds te
bereiken. Als de groep "klein" niet te groot wordt ge-
kozen, hebben de "kleine klanten" groot voordeel en de
"grote klanten" nauwelijks nadeel.
- neem bij "opvullen" van een werkplaats met stopwerk kar-
weien met korte bewerkingsduur.

Door velen, o.a. door Bakker en Conway, zijn simulaties uit-
gevoerd voor voorrangsregels (voor orders in een "jobshop")
waarin o.a. voorkomen:

- de gevraagde leverdatum voor de order;
- de bewerkingstijd voor de fasen, die moeten worden doorlopen;
- de wachtrij in de verschillende fasen.

Deze studies geven de mogelijkheid, inzichten uit de wachttijdtheorie te verbinden met inzichten uit de netwerktheorie.

Toepassingsgebieden.

Vele toepassingsgebieden zijn reeds bekend: wachttijden voor personen aan loketten, voor transportmiddelen, voor orders. In de literatuurlijst zijn enkele goede toepassingen vermeld. Op het college wordt een toepassing besproken. Bedenk, dat de netwerk theorie inzicht levert in de samenhang tussen toelaatbare wachttijden van verschillende klanten.

Het geval $r = 100\%$.

In de praktijk treft men vaak de situatie aan waarin $r = 100\%$ en $E(w)$ is eindig. Dit verbaast op het eerste gezicht, gezien de behandelde resultaten. Oorzaken kunnen echter zijn:

- elasticiteit
- statistisch evenwicht nog niet bereikt
- de binnenkomst verloopt volgens dienstregeling met kleine afwijkingen; $C_{SV} = 0$ (zie Adler en Fricker)
- er is stopwerk aanwezig.

Methoden voor waarneming en oplossing.

Methoden voor waarneming zijn o.a. beschreven door Edie, Brigham en Herrmann.

Oplossing kan plaats vinden:

- door in de praktijksituatie alternatieven aan te brengen en te meten
- door theoretische berekeningen
 - . differentiaal en differentievergelijkingen (zie appendix H)
 - . integraalvergelijkingen (zie Lindley)
 - . Markov-ketens (zie bijv. Kendall)
- door simulatie, gewoonlijk op een computer.

Maatregelen ter bestrijding van loketwachttijden.

a) Het aanbrengen van elasticiteit in:

1. De capaciteit, zoals het tijdelijk opstellen van meer loketten; overwerken; uitbesteden van werk.
2. De bewerkingstijd, zoals het tijdelijk afwijken van de optimale produktieserie Q^* (dit dus voor een produktie-afdeling die op voorraad werkt).
3. De binnenkomst. Er is tussen de orderportefeuille en de werkplaats een wachttijd. De binnenkomst van de orders in de werkplaats kan soms aangepast worden.
4. Prioriteitsregels. Men kan de prioriteitsregels aanpassen aan de behoefte van het moment; b.v. Als de afdeling frezen tijdelijk gebrek aan werk krijgt, kan men dát werk prioriteit geven, dat reeds is uitgegeven, maar waar nog frees-bewerkingen aan moeten gebeuren.

b) Het aanbrengen van blijvende wijzigingen in het bestaande systeem:

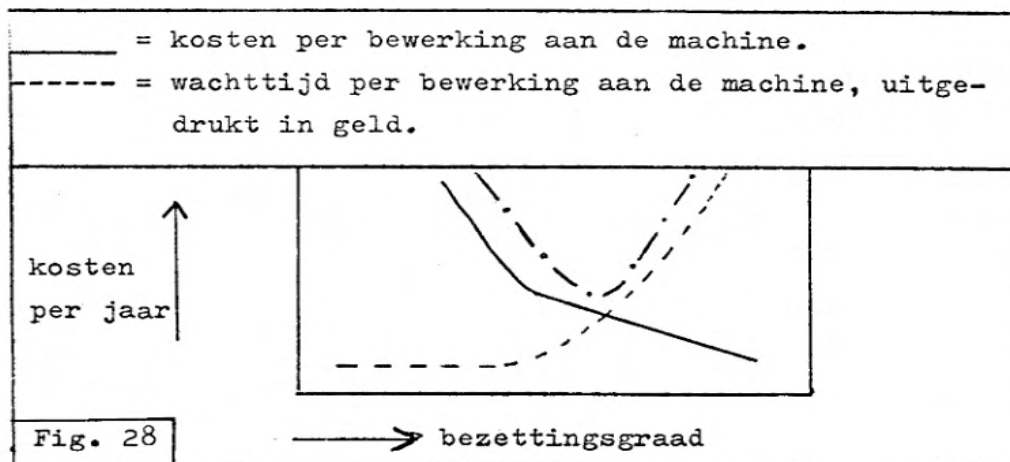
1. Verhoging van de capaciteit. (Soms moet dan tevens "stopwerk" gezocht worden).
2. Centralisatie. b.v. Twee kapperszaken in twee verschillende straten. Het kan op een bepaald moment voorkomen dat bij de een de klanten staan te wachten, terwijl bij de ander niets te doen is. Zet deze kappers bij elkaar; (1 rij in plaats van 2 rijen). Een ander voorbeeld is de centralisatie van de kassa's in een warenhuis. De centrale kasse bevindt zich in de kelder. Via de buizenpost, die op vele punten in het magazijn gebruikt kan worden, wordt men door de kassa bediend.
3. Ontspecialisering. b.v. Postkantoor, een loket voor stortingen giro; ander loket voor innen cheques. Beide handelingen aan beide loketten door één man per loket laten doen.
4. Concentratie. 2 loketten worden 1 loket met dubbele bezetting. 2 draaibanken vervangen door 1 draaibank met dubbele snelheid.

- 118 -

5. Verlagen van de gemiddelde bewerkingstijd. b.v. Vroeger wat stortingsbiljet van de giro 3-delig en moest op ieder deel gestempeld en gesigneerd worden. Tegenwoordig stortingsbiljet 2-delig.
 6. Verlagen van de C_{sb} door verlaging van σ_0 ; streven naar dienstregeling of afspraakstelsel.
 7. Verlagen C_{sv} ; in de praktijk soms door het in stukken hakken van een groot karwei in 3 of meer deelkarweien, die niet aansluitend gedaan hoeven te worden.
 8. Regelen van binnenkomst der klanten door verlaging C_{sb} (zie 6) en door het afstemmen van de binnenkomstintervallen, zoals bij een tandarts die rekening houdt met de bewerkingstijden en de klanten op geschatte tijdsintervallen afsprekt.
 9. Speciale maatregelen voor speciale karweien en speciale loketten voor speciaal werk.
 10. Het hebben (of invoeren) van prioriteitsregels. Door voorrang te geven aan kleine karweitjes, verlaagt men de gemiddelde wachttijd. Zie verder Bakker.
- c) Algemene maatregelen (indien mogelijk).
1. Het elimineren van bepaalde bewerkingen.
 2. Combineren, b.v. 2 op elkaar volgende bewerkingen op één draaibank, zodat er tussen beide bewerkingen geen wachttijd ontstaat.
 3. Het overlappen van bewerkingen die elkaar opvolgen.
 4. Parallel laten lopen van bewerkingen.
 5. Vooraf aankondigen, d.w.z., een bankwerker moet niet steeds aankomen bij de werkvoorbereider als hij klaar is, doch moet tevoren aankondigen dat het werk afloopt, zodat een volgend karwei klaar ligt.

Bij al deze maatregelen moeten we steeds zoeken naar een optimum. Er zijn maatregelen genoemd die tegengesteld zijn aan elkaar. Als voorbeeld het optimaliseren van de tegenstelling wachttijd en bezettingsgraad bij een machine. Hoe groter de bezettingsgraad van de machine, des te rendabeler is de machine, doch des te langer is de wachttijd. Dit gaan we in een grafiek uitzetten.

- 119 -



Van beide kostencurves wordt de minimum-som gezocht. Het is duidelijk dat in een en dezelfde werkplaats een dure machine bij overigens gelijke omstandigheden hoger bezet moet worden dan een goedkope machine, omdat anders de wachttijd-component meer toeneemt dan de machine-kosten afnemen. Zie Van Hees voor een methode om σ van doorlooptijd te verlagen. Zie ook Eddison, Sittig.

Literatuuropgave loketwachttijden.

a. Korte algemene overzichten

- 1) J.W. Cohen - "Wachten" intreerede THD 1957.
- 2) D.R. Cox - "The statistical analysis of congestion" Journ.Roy. Stat.Soc. A 118 (1955), 3.
- 3) W. Monhemius - "Le problème dus temps d'attente dans l'étude du Travail" l'Etude du Travail, nov. 1964.
- 4) J. Sittig - "Bezetting, doorlooptijd en investeringen" Sigma 4 (1958), 5.

b. Leerboeken of hoofdstukken daaruit.

- 1) R.L. Ackoff, E.L. Arnoff en C.W. Churchman - "Introduction to operations research" Part VI. Wiley 1957.
- 2) J.F. Benders - College THE, Stochastische Processen.
- 3) D.R. Cox en W.L. Smith / "Queues" Methuen 1961.

- 120 -

- 4) L.S. Goddard - "Mathematical techniques of OR".
- 5) R.T. Eddison e.a. - "Operational research in management", chapter III, door E.D. van Rest en F.J. Toft "Queueing and Congestion".
- 6) A. Kaufmann en R. Cruon - "Les phénomènes d'attente" Dunod 1961.
- 7) P.M. Morse - "Queues, inventories and maintenance" Wiley 1958.
- 8) T.L. Saaty - "Mathematical methods of operations research" Mc. Graw Hill 1959.
- 9) T.L. Saaty - "Elements of queueing theory" Mc. Graw Hill 1961.
- 10) M.Sasieni e.a. - "Operations Research" 1961.
- 11) B. v.d. Veen "Introduction to the theory of O.R."

c. Boeken of artikelen met tabellen en/of grafieken.

- 1) C.J. Anson - "Determining machine and operator utilisation and synchronisation allowances". Time and Motion Study J., 5 (1956) nov.
- 2) A. Descloux - "Delay tables for finite and infinite source systems" Mc. Graw Hill 1962.
- 3) L.G. Peck en R.N. Hazelwood - "Finite queueing tables" Wiley 1958.
- 4) J.R. Shelton - "A solution method for waiting line problems". J.Ind.Eng. XI (1960) pag. 293.

d. Theorie over speciale onderwerpen.

- 1) N.T.J. Bailey - "Queueing for medical care". Applied Statistics III (1954) nr. 3, pag. 137.
- 2) W. Bakker - "De levertijd in machinefabrieken". diss. THD 1965.
- 3) F. Benson - "Further notes on the productivity of machines requiring attention at random intervals". J. Roy. Stat. Soc. B. 14 (1952) pag. 200
- 4) A. Cobham - "Priority assignment in waiting line problems". JORSA 2(1954) pag. 70, en JORSA 3(1955) pag. 547.
- 5) D.R. Cox en W.L. Smith - "The superposition of several strictly periodic sequences of events" Biometrika 40 (1953) pag. 1.

- 121 -

- 6) C.D. Crommelin - "Delay probability formulae" Post Off.El.Eng. Journ. 26 (1934) pag. 266.
- 7) J. Harling - "Simulation technique/s in OR" Operations Research 6(1958) pag. 307.
- 8) R.N. van Hees - "Betrouwbare doorlooptijden, basis voor betrouwbare levertijden" Sigma 1959 aug.
- 9) D.G. Kendall - "Stochastic processes etc." Annals of Math.Stat., 1953 sept.
- 10) D.V. Lindley - "The theory of queues with a single server" Proc.Camb.Phil.Soc. 48 (1952) pag. 227.
- 11) T. O'Connor - "Cyclic servicing" Journ.Ind.Eng. X (1959) pag. 303.
- 12) T.E. Phipps - "Machine repair as a priority" waiting line problem" Operations Research 4 (1956) pag. 76.
- 13) F.W. Steutel - "De invloed van een prioriteitsregeling op de gemiddelde wachttijd" Stat.Neerl. 13 (1959) pag. 503.
- 14) K.D. Tocker - "The art of simulation" English Universities Press 1961.
- 15) M.L. Wijvekate - "Bepalingen van het optimale controle-interval" Stat.Neerl. 10 (1956) p. 55.

e. Voorbeelden.

Meermachinebediening:

- 1) W. Bakker - "Optimale snijsnelheid bij meermachinebediening" De Ingenieur 74 (1962) pag. W 116.
- 2) F. Benson e.a. - "Machine interference etc." J. Textile Inst. 44 (1953) pag. T 619.
- 3) E.H. Bowman en R.B. Fetter - "Analyses of industrial operations" Irwin 1959, zie hoofdstuk 14 door T.M. Mangelsdorf.

Mensen voor "loketten".

- 4) G. Brigham - "On a congestion problem in an aircraft factory" J.O.R.S.A. 3 (1955) pag. 412 ook als hoofdstuk 15 in (e3).
- 5) G.J. Fortuin - "Wachttijden van patiënten". Stat.Neerl. 13(1959) nr. 3

- 122 -

- 6) E. Herrmann - "Warteschlangen als Objekt des Arbeitsstudiums".
Sonderheft der REFA - Nachrichten 1962.
- 7) A.M. Lee en P.A. Longton - "Queueing processes associated with passengers check - in"
O.R. Quarterly 10 (1959) pag. 56.

Wachttijden voor auto's, schepen, vliegtuigen:

- 8) R.B. Adler en S.J. Fricker - "Notes on the flow of scheduled air traffic". J. Roy Aeron.Soc. 58 (1954) pag. 475.
- 9) R.T. Eddison en D.G. Owen - "Ore - handling at British ports". O.R. Quart. 4 (1953) pag. 39.
- 10) H.P. Galliher en R.C. Wheeler - "Nonstationary queueing probabilities for landing congestion of aircraft"
Operations Research 6(1958) pag. 264.
- 11) L.C. Edie - "Traffic delays at toll booths".
J.O.R.S.A. 2 (1954) pag. 107.
- 12) S. Kramer - "Een analytische aanpak van het wachttijdenprobleem in een havenbedrijf".
Mededelingen S.O.R. (V.V.S) 1 (1962) pag. 39.
- 13) H.J.M. Lombaers - "Determining the ore-unloading capacity of a harbour installation by simulation on a computer". Proc. 2nd Int.Conf. on OR pag. 328.
- 14) D.H. Schiller en M.M. Lavin - "The determination of requirements for warehouse dock facilities".
Operations Research 4(1956) pag. 231.

Wachttijden voor orders, goederen:

- 15) J.C. Clapham en T.A. Lambe - "Operations research in lumber sorting" Operations Res. 1963.
- 16) J. Sittig - "De statistische basis van de planning in een machinefabriek" Stat.Neerl. 9 (1955) pag. 47.

12. Netwerkmethoden voor projektplanning.

12.1. Inleiding.

Tegen 1960 werden onafhankelijk van elkaar enkele planning-methoden ontwikkeld, die wij nu met later ontwikkelde varianten samenvatten onder de naam netwerkmethoden. Grondgedachte van alle netwerkmethoden is de splitsing van twee stadia van planning die tot dusver vaak niet gescheiden werden:

- vastleggen van de activiteiten, die verricht moeten worden en de eisen van opeenvolging zoals de logica van het project zelf die bepaalt. Dit vastleggen gebeurt d.m.v. een netwerk of relatiediagram ("arrow diagram").
- het maken van een tijdschema voor het project.

Over de netwerkmethodes is inmiddels een uitgebreide literatuur ontstaan; vele toepassingsgebieden zijn bewerkt, o.a.:

- het ontwerpen en ontwikkelen van vliegtuigen, wapensystemen (POLARIS) etc.
- het bouwen van fabrieken etc.
- onderhoudswerk aan ovens, chemische installaties etc.
- op de markt brengen van een nieuw produkt.

Het gaat steeds om projecten, die weliswaar een duidelijk begin en einde hebben maar waarbinnen gecompliceerde relaties bestaan tussen de delen van het projekt.

12.2. Het netwerk tekenen.

Een belangrijk voordeel van de netwerkmethode is, dat men tevoren het netwerk moet tekenen, waartoe men het projekt moet doordenken. Het tekenen van het netwerk is het moeilijkste werk, neemt veel tijd, vraagt veel ervaring; het gebeurt in nauwe samenwerking met de latere uitvoerders.

Zie voorbeeld "vervanging pijpleiding" (fig. 3/)

Er kan onderscheid worden gemaakt tussen twee groepen netwerkmethoden:

- a) "Aktiviteit is pijl" ("activity on arrow")

Tot deze groep behoren:

- CPM of "critical path method", zie Kelley (1959 en 1963)

- 124 -

- PERT of "program evaluation and review technique", zie o.a. Malcolm e.a. (1959).
- b) "Aktiviteit is knooppunt" ("activity on node")
Tot deze groep behoren:
 - MPM of "Metra-Potentiaal methode", ontwikkeld in 1958 in Frankrijk door adviesbureau SEMA dat deel uitmaakt van de groep METRA.
Zie o.a. Roy (1962)
 - "precedence diagramming".

Het netwerk vlg "aktiviteit is pijl".

Ga eerst na, welke activiteiten (ofwel: handelingen) moeten worden verricht.

Ga voor elke aktiviteit na, welke andere activiteiten rechtstreeks *) voorafgegaan moeten zijn. Bijv. (fig. 31) het plaatsen van de nieuwe pijp kan pas dan gebeuren, als twee voorafgaande activiteiten gereed zijn, nl. het maken van de nieuwe pijp en het verwijderen van de oude pijp. Ook het opmeten van de oude leiding moet zijn gebeurd, maar dit gaat niet rechtstreeks, niet onmiddellijk vooraf aan het plaatsen van de nieuwe pijp. In het netwerk wordt elke aktiviteit voorgesteld door een pijl; de lengte van deze pijl en de hoek, waaronder hij getekend is hebben geen betekenis. Van belang is slechts de onderlinge samenhang van de pijlen.

In het netwerk vindt men genummerde knooppunten of mijlpalen ("events"). Een mijlpaal is bereikt indien alle activiteiten, waarvan de pijl in die mijlpaal uitkomt, gereed zijn. Een aktiviteit kan pas dan beginnen als de mijlpaal, waar de pijl van uit gaat, is bereikt.

Bij het nummeren van mijlpalen is de regel: de mijlpaal aan het einde van een pijl niet nummeren voordat die aan het begin van de pijl een nummer heeft.

(Praktische tip: nadat het netwerk gereed is treden altijd nog wel wijzigingen op; nummer daarom in eerste instantie niet 1,2,3 etc., maar 10,20,30 etc.)

Om twee redenen zijn "dummies" nodig (pijlen voorstellende een loze of fictieve handeling); dummies hebben een tijdsduur

*) Let op het verschil tussen "voorafgaan aan" en "rechtstreeks" of "onmiddellijk voorafgaan aan".

nul.

Reden 1. Indien men, zoals vaak gebeurt, de activiteiten wil aanduiden met de nummers van de mijlpalen aan begin- en eindpunt, is in onderstaande situatie een (gestippelde) dummy nodig, anders zou de aanduiding (40,70) dubbelzinnig zijn.

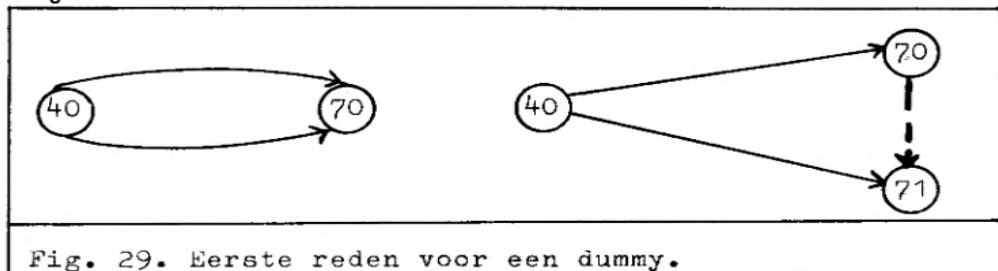


Fig. 29. Eerste reden voor een dummy.

Reden 2. Stel dat de volgende eisen in beeld moeten worden gebracht:

- A gaat vooraf aan C
- B gaat vooraf aan D
- B gaat vooraf aan C

Dit mag niet worden voorgesteld zoals hieronder links is aangegeven, wel zoals rechts is geschetst (links wordt ook geëist "A voor D", maar dat is ten onrechte)

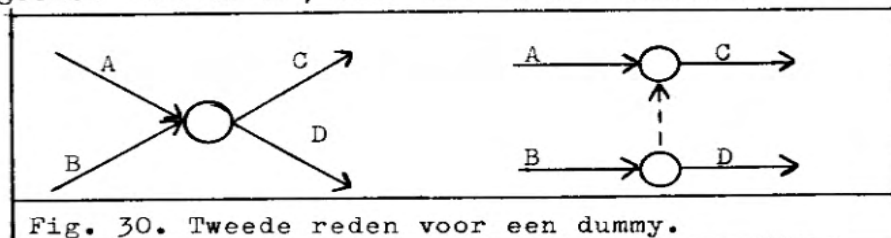


Fig. 30. Tweede reden voor een dummy.

Voor het tekenen van netwerken bestaan uitstekende leerboeken (Martino; Battersby; Lockyer).

Het netwerk volgens "aktiviteit is knooppunt".

Hier wordt in het bijzonder MPM beschreven. De activiteiten worden doorlopend genummerd 1,2 ... (n-1), n.

Voor een willekeurige activiteit i geldt verder:

- t_i = startmoment van activiteit i
- d_i = duur van activiteit i

Voorbeeld netwerk. Sterk geschematiseerd plan voor "vervanging pijpleiding in een chemisch bedrijf. Voor uitgewerkt schema zie o.a. J.H. De Bruin, Arbeidsk.Tijdschr. Dec. 1962. Methode "aktiviteit is pijl".

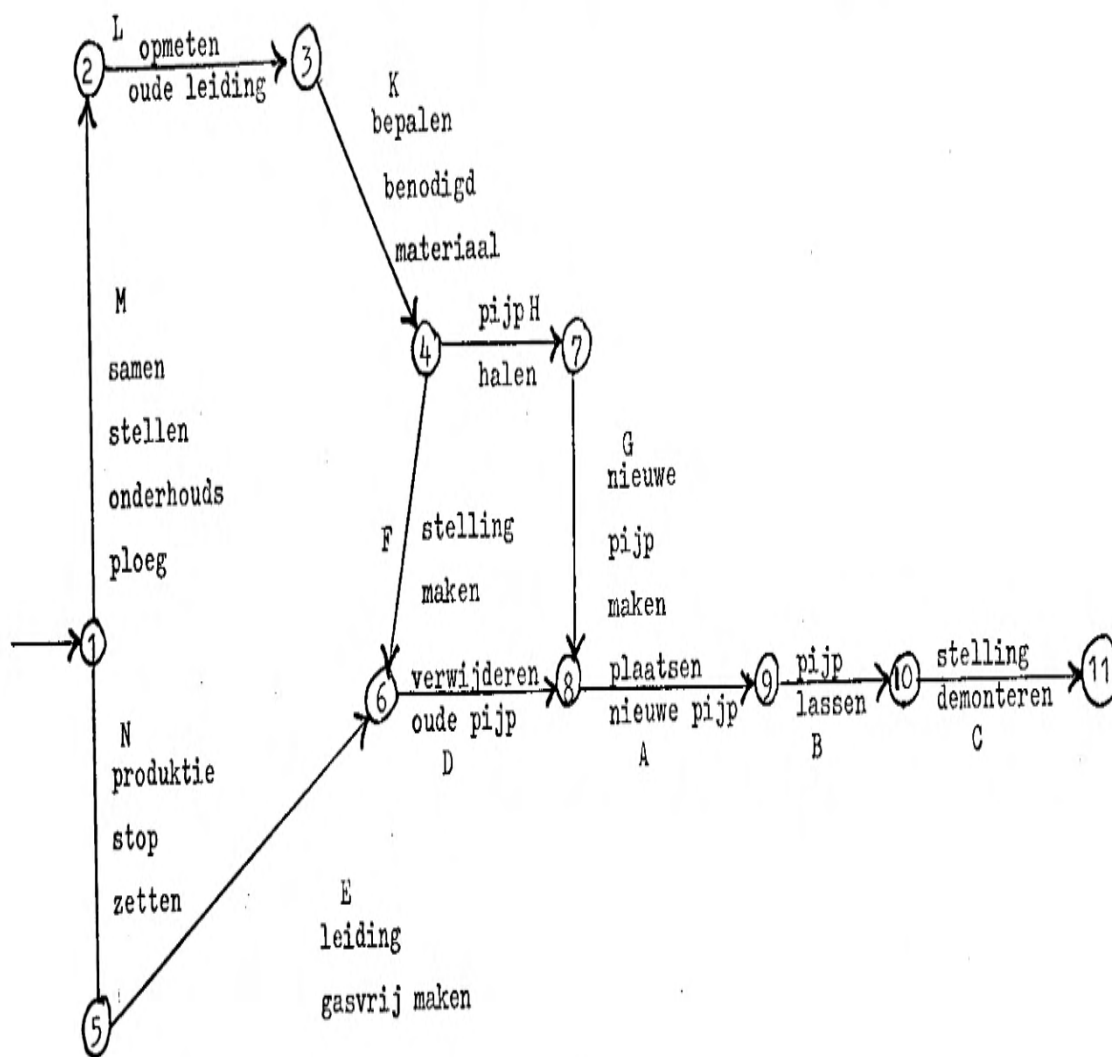


Fig. 31.

a_{ij} = tijdsduurbepierking tussen de start van aktiviteit i
en de start van j

t_0 = aanvangsmoment van het project.

M.P.M. hanteert twee categorieën relaties, waarop alle anderen terug te voeren zijn. Dit zijn:

1. Tussen de start van aktiviteit j en die van i moet minstens een tijdsverschil a_{ij} liggen.
2. Tussen de start van aktiviteit j en die van i mag hooguit een tijdsverschil a_{ij} liggen.

Bepierking 1 kan als volgt geschreven worden: $t_j - t_i \geq a_{ij}$ (1)

Voor bepierking 2 geldt: $t_j - t_i \leq a_{ij}$.

Om redenen, die bij de constructie van het netwerk duidelijk worden, schrijven we deze ongelijkheid in de vorm:

$$t_i - t_j \geq -a_{ij} \quad (2)$$

Het kenmerkende verschil tussen beide ongelijkheden is dat het rechterlid in (1) positief en in (2) negatief is. Een positief rechterlid geeft aan dat de ongelijkheid betrekking heeft op het vroegst toegestane start tijdstip, een negatieve waarde daarentegen duidt op het laatst toegestane tijdstip.

Alle andere voorkomende bepierkingen kunnen in de vorm van (1) of (2) geschreven worden.

Enkele voorbeelden ter verduidelijking:

- Aktiviteit j mag pas starten nadat i voltooid is.

$$t_j - t_i \geq d_i$$

- Een aktiviteit i mag op zijn vroegst een tijd T na aanvang van het project starten.

$$t_i - t_0 \geq T$$

- Een aktiviteit i moet op zijn laatst een tijd T na aanvang van het project klaar zijn

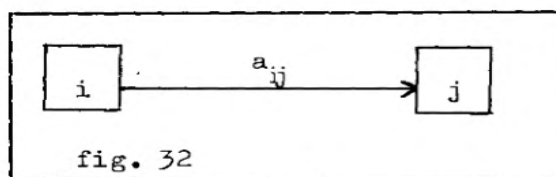
$$t_0 - t_i \geq -(T - d_i)$$

In tegenstelling tot PERT en CPM, hanteert M.P.M. een netwerkconstructie, waarbij de knooppunten de aktiviteiten weergeven en waarbij de technische bepierkingen door pijlen worden voorgesteld. Aangezien zowel een netwerk als een stelsel ongelijkheden de samenhang tussen de aktiviteiten weergeven, moet er

tussen beiden een verband bestaan. Het blijkt voldoende te zijn indien vastgelegd wordt volgens welke regel ongelijkheid (1) grafisch voorgesteld kan worden. Alle andere beperkingen kunnen met dezelfde regel in het netwerk tot uitdrukking worden gebracht.

De beperking, dat er tussen de start van activiteit j en die van i minstens een tijdsverschil a_{ij} moet liggen is in onderstaande figuur zowel mathematisch als in de vorm van een netwerk weergegeven.

$$t_j - t_i \geq a_{ij}$$



Het netwerk geeft de activiteiten als knooppunten en de beperking tussen de aanvangstijden als een verbindende pijl. De lengte van de beperkende tijdsduur a_{ij} wordt naast de pijl genoteerd. De richting van de pijl wordt bepaald door de volgende regel:

Indien we een ongelijkheid weergeven van de type $\geq$, tekenen we de pijl in de richting van dat knooppunt, waarvan de index overeenkomt met de tijdsindex van de voor het minteken staande factor. Heeft a_{ij} een positief teken, dan heeft men te maken met een minimumvoorwaarde. Een negatief teken daarentegen geeft een maximumvoorwaarde aan. Volgens dezelfde regel is in fig. 33 voorwaarde (2) weergegeven:

$$t_i - t_j \geq -a_{ij}$$

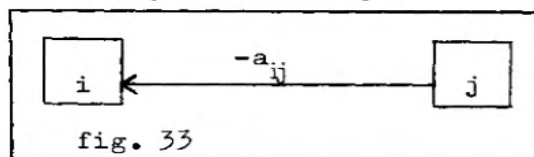
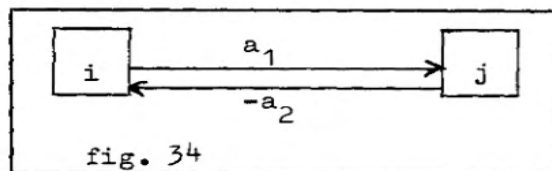


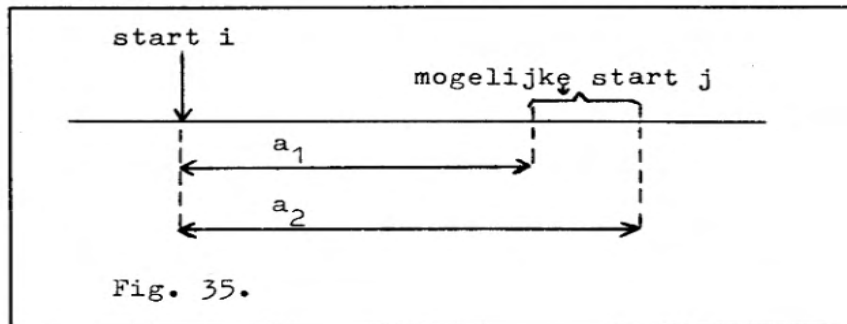
Fig. 34 geeft een combinatie van een vroegst mogelijke en een laatst toegestane beperking.



Mathematisch geformuleerd:
$$\begin{cases} t_j - t_i \geq a_1 \\ t_i - t_j \geq -a_2 \end{cases}$$

Tussen de start van activiteit j en van activiteit i mag maximaal een tijd a_2 liggen en er moet minimaal een afstand van a_1 tijdseenheden aanwezig zijn. Fig. 35 laat deze combinatie

nogmaals, nu in een tijddiagram zien.

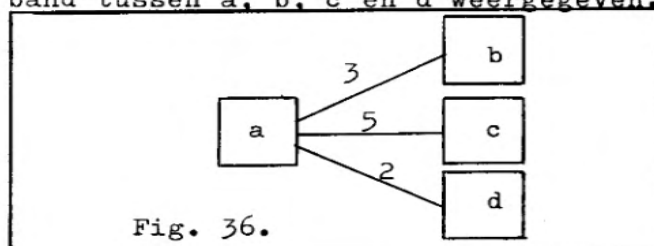


Hebben in fig. 34 a_1 en a_2 dezelfde waarde, bv. 10, dan geeft men hiermee aan dat j precies 10 tijdseenheden na de aanvang van i moet starten. Telt men de beide ongelijkheden, die aan fig. 34 ten grondslag liggen bij elkaar op, dan is het resultaat:

$$t_j - t_i + t_i - t_j \geq a_1 - a_2$$

of
$$a_1 - a_2 \leq 0$$

De som van de tijdsbeperkingen mag geen positieve waarde hebben. Dit geldt voor iedere cyclus in het netwerk. Een cyclus is een weg door het netwerk, waarvan begin en einde in het zelfde knooppunt samenvallen. Fig. 34 laat de meest eenvoudige cyclus zien. Tot nu toe zijn alleen beperkingen aangegeven, die tussen twee activiteiten gelden. Het is duidelijk dat vaker een samenhang tussen meerdere activiteiten aanwezig is. In fig. 36 is een verband tussen a, b, c en d weergegeven.



Er moet gelden:

$$\begin{aligned} t_b - t_a &\geq 3 \\ t_c - t_a &\geq 5 \\ t_d - t_a &\geq 2 \end{aligned}$$

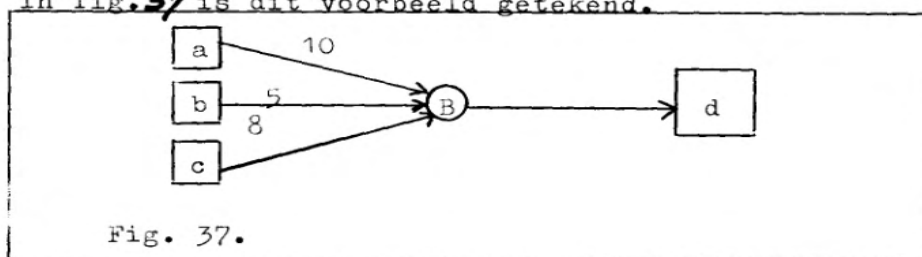
Hierdoor zijn de starttijdstippen van b, c en d t.o.v. a bepaald. Een andere situatie is in fig. 37 getekend.

- 130 -

Nu moet gelden

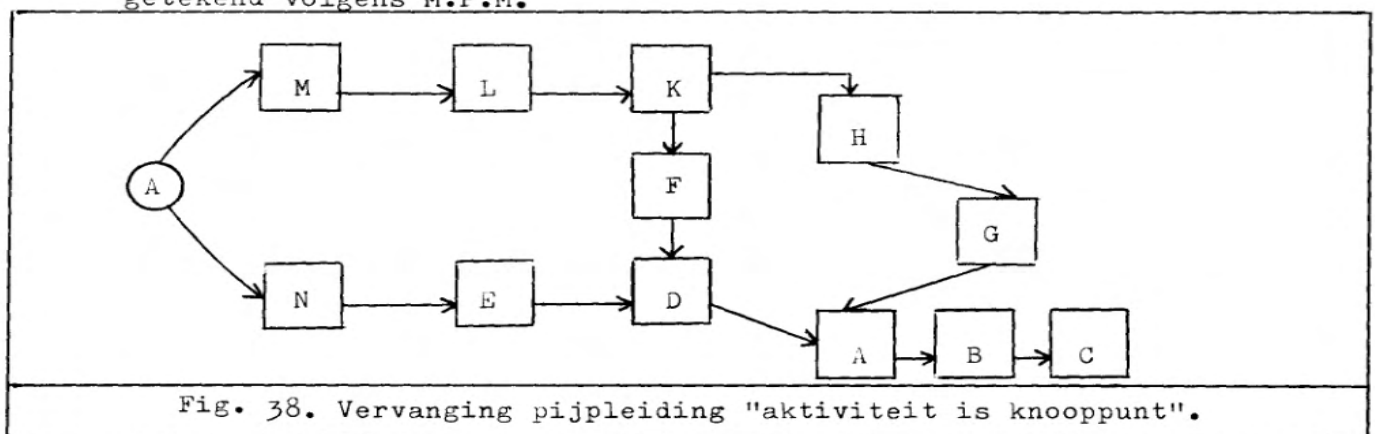
$$\begin{aligned} t_d - t_a &\geq 10 \\ t_d - t_b &\geq 5 \\ t_d - t_c &\geq 8 \end{aligned}$$

De aldus geformuleerde voorwaarde is een "and" conditie. D.w.z. dat de start van d pas kan plaatsvinden indien aan alle drie de voorwaarden voldaan is. Het laatste moment is hier bepalend. Het kan in de praktijk echter ook voorkomen dat het voldoen aan één voorwaarde de beperkingen voor d opheft. d kan starten indien of 10 dagen verlopen zijn na de start van a, of 5 dagen na de start van b of 8 dagen na die van c. Dit is een "or" conditie. In fig. 37 is dit voorbeeld getekend.



De beperkingen worden in B gebundeld. Is aan een der beperkingen voldaan, dan kan d starten.

Het voorbeeld van fig 31 (vervanging pijpleiding) is in fig 38 getekend volgens M.P.M.



Voor verdere voorbeelden zien Van Houten e.a. (1968). Deze auteurs geven de volgende voordelen van de methoden uit de groep "aktiviteit is knooppunt":

- 131 -

- er zijn geen dummies nodig
 - overlappingsen kunnen zonder splitsing van activiteiten worden getekend
 - bij wijziging van relaties blijft de aktiviteitscode onveranderd
 - wijzigingen in relaties kunnen eenvoudig worden aangebracht.
- Er is dus meer verschil dan slechts een andere wijze van tekenen.

Netwerken volgens GERT.

Publicaties van Eisner en Freeman over "General PERT" hebben ten slotte geleid tot de ontwikkeling van GERT (graphical evaluation and review technique). Met deze methode kan men meer gecompliceerde relaties tussen activiteiten verwerken, met name in situaties waarbij slechts met een bepaalde kans verschillende volgorde-relaties kunnen worden aangegeven en waarbij slechts een bepaalde kans bestaat, dat een activiteit werkelijk tot het gewenste einde komt.

Algemene opmerkingen over structuuranalyse.

Bij het tekenen van het netwerk bekommeren wij ons nog niet om eventuele capaciteitsbeperkingen. In een bepaalde concrete situatie moeten wellicht "nieuwe pijp maken" en "verwijderen oude pijp" door dezelfde man worden gedaan; wat betreft het projekt zelf echter kan het parallel gebeuren. Het is moeilijk te beoordelen, tot hoever men moet gaan met het splitsen van activiteiten; dat hangt sterk samen met het doel, waarvoor men het netwerk heeft gemaakt. Wil men later capaciteitsberekeningen uitvoeren, dan moet men splitsen totdat bij elke activiteit duidelijk is, welk soort capaciteit nodig is. Wil men de leider van het gehele projekt over de voortgang informeren, dan is wellicht een minder vergaande splitsing nodig. Veelal is het uit organisatorische overwegingen gewenst, het diagram zo te tekenen dat per activiteit een verantwoordelijke persoon kan worden aangewezen. Voor verdere richtlijnen zie o.a. Battersby.

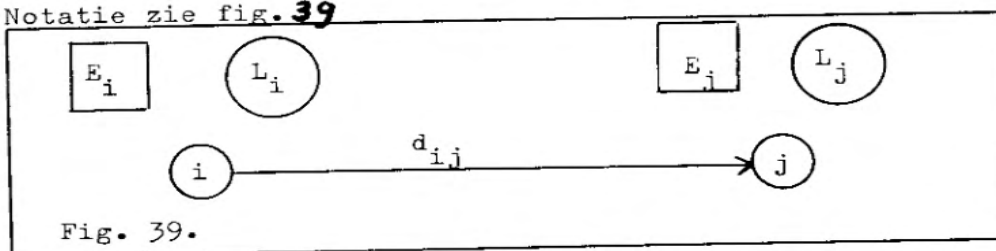
12.3. Berekening van tijdstippen en spelingen.

Deze berekening wordt hier alleen uitgevoerd voor "aktiviteit is pijp" methoden. Voor elke activiteit is een schatting nodig

van de verwachte tijdsduur; soms volgt deze uit reeds aanwezige calculaties. Zo niet, dan maakt de persoon, die verantwoordelijk is voor de uitvoering van de activiteit, een schatting. Voorlopig beschouwen we de tijdsduren als constante grootheden. De volgende grootheden kunnen nu voor elke mijlpaal worden berekend:

- vroegst mogelijke tijdstip = het vroegste tijdstip waarop deze mijlpaal kan bereikt worden (in de figuur aangeduid in $\square$)
- laatst toelaatbare tijdstip; indien de mijlpaal na dit moment bereikt wordt, wordt het vroegst mogelijke tijdstip van de eind-mijlpaal niet gehaald (aangeduid in $\circ$)

Notatie zie fig. 39



Karweien waarvoor $E_i = L_i$ en $E_j = L_j$, terwijl bovendien $E_j - E_i = d_{ij}$ liggen op het kritieke pad. In een groot projekt ligt veelal slechts 10 à 20% van de activiteiten op het kritieke pad (in eerste instantie).

De berekening van tijdstippen wordt periodiek herhaald en geeft de projectleider desgewenst het inzicht, nodig voor bijsturen.

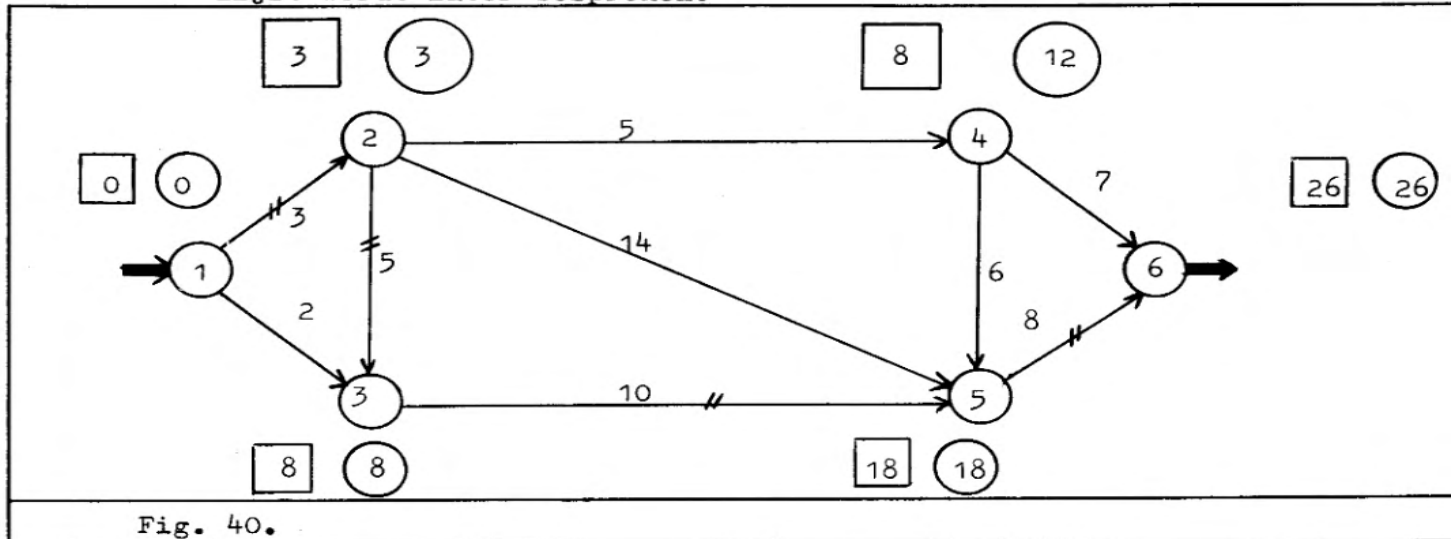
Per activiteit kan de speling *) worden berekend:

- maximale speling ("total float") = $L_j - E_i - d_{ij}$
- minimale speling ("independent float") = $E_j - L_i - d_{ij}$
en = 0, indien deze expressie < 0 wordt
- uitloopspeling ("free float") = $E_j - E_i - d_{ij}$
- aanloopspeling = $L_j - L_i - d_{ij}$

*) De Nederlandse termen zijn gegeven volgens, de afspraken in de werkgroepen van de Stuurgroep Planning. Men gebruikt ook wel andere namen, zoals resp.: totale speling, onafhankelijke speling, vrije speling, storend ingrijpende speling.

- 133 -

Zie ter illustratie bijgaande lijst van karweien, horend bij het getekende netwerk. De laatste kolom van deze lijst wordt later besproken.



Aktiviteit (i,j)	Duur d_{ij}	Start		Einde		Speling			Kosten	
		vroegst E_i	laatst L_i	vroegst E_j	laatst L_j	max	min	uitl	aanl	voor ver- snellen 1 dag
1,2	3	0	0	3	3	0	0	0	0	f 30,--
1,3	2	0	0	8	8	6	6	6	6	f 10,--
2,3	5	3	3	8	8	0	0	0	0	f 45,--
2,4	5	3	3	8	12	4	0	0	4	f 150,--
2,5	14	3	3	18	18	1	1	1	1	f 60,--
3,5	10	8	8	18	18	0	0	0	0	f 30,--
4,5	6	8	12	18	18	4	0	4	0	f 80,--
4,6	7	8	12	26	26	11	7	11	7	f 50,--

N.B. De activiteiten op het kritieke pad zijn gekenmerkt door een maximale speling = 0.

De nu verkregen informatie stelt ons in staat, antwoord te geven op vragen als:

- indien de totale projektduur verkort moet worden, aan welke activiteiten moet dan speciale aandacht worden besteed.

- 134 -

- mijlpaal 4 blijkt tijdens de uitvoering van het projekt pas bereikt te worden op tijdstip 11 (of: 13);
wat zijn de consequenties?

Het verschil met de klassieke "bar chart" is, dat daarin de onderlinge relatie van de activiteiten niet blijkt; bovenstaande vragen kunnen dan niet worden beantwoord. Het is bij een beperkt netwerk mogelijk, de pijlen toch op een tijdschaal te tekenen. Het kritieke pad is dan een rechte, aaneengesloten rij pijlen; de andere activiteiten worden in deze tekening ofwel allemaal zo vroeg mogelijk ofwel allemaal zo laat mogelijk geplaatst. Met kleuren kan men evt. de benodigde soorten capaciteit aangeven.

12.4. Tijdstippen berekenen bij PERT.

Wij beschouwen $\underline{d}_{ij}$ als een stochastische variabele.

Wij vragen drie tijdschattingen voor elke activiteit:

a = optimistische tijd

m = reële tijd (geïnterpreteerd als: de modus)

b = pessimistische tijd (alles, wat redelijkerwijs tegen kan zitten, doet dat ook).

Deze schattingen behoren:

- onafhankelijk te zijn van de duur van andere activiteiten
- onbeïnvloed te zijn door de beschikbare tijd voor deze activiteit.

Bij de verdere berekening wordt aangenomen, dat de werkelijke tijdsduren $\underline{d}_{ij}$ onderling onafhankelijke trekkingen zijn uit de verschillende frequentieverdelingen.

Men hoopt als schattingen van a en b zodanige waarden te krijgen, dat bij benadering geldt:

$$P[\underline{d} < a] = 0,01$$

$$P[\underline{d} > b] = 0,01$$

Men gebruikt in de oorspronkelijke versie van PERT als aanpassing echter de zgn betaverdeling, gegeven door de kansdichtheidsfunctie

$$g(t) = K(t-a)^{\frac{1}{3}}(b-t)^{\frac{2}{3}} \text{ voor } a \leq t \leq b$$

$$g(t) = 0 \text{ voor } t < a \text{ en voor } t > b$$

- 135 -

waarbij dus $P[\underline{d} < a] = 0$ en $P[\underline{d} > b] = 0$

Als redelijke benadering van de verwachte waarde en de standaarddeviatie van deze verdeling blijkt te voldoen:

$$E(\underline{d}) = \frac{a + 4m + b}{6}$$

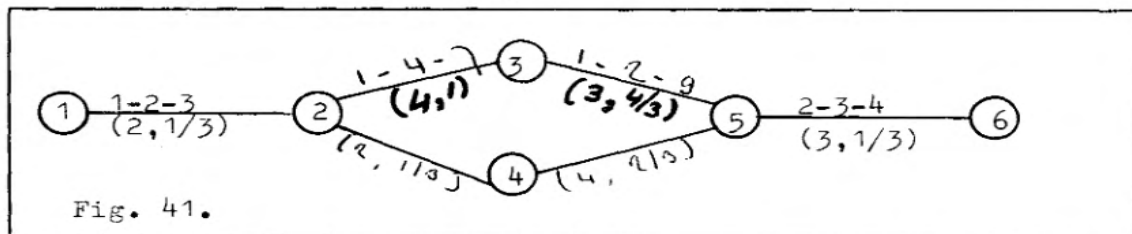
$$\sigma(\underline{d}) = \frac{b - a}{6}$$

Men berekent nu de E- en L-waarden als tevoren, doch met gebruik van $E(\underline{d})$ in plaats van d . Men vindt zo de verwachte waarde van het vroegste tijdstip, waarop het gehele projekt gereed kan zijn (of: waarop de mijlpaal i bereikt wordt). Door nu langs het kritieke pad varianties op te tellen kan men ook de spreiding voor tijdstippen bepalen. Voor de totale tijdsduur nemen we een normale verdeling aan (som van groot aantal onafhankelijke grootheden).

Wij kunnen nu vragen beantwoorden als:

- wat is de kans, dat het projekt binnen 14 dagen gereed is?
- welke leverdatum kunnen wij met 95% kans garanderen?

Voorbeeld PERT-berekening:



Boven de pijlen zijn vermeld: a, m, b .

Onder de pijlen zijn vermeld: $E(\underline{d}), \sigma$

Kritieke pad: 1-2-3-5-6.

$$E(\underline{E}_6) = 2 + 4 + 3 + 3 = 12.$$

$$\text{var}(\underline{E}_6) = 1/9 + 1 + 16/9 + 1/9 = \frac{27}{9} = 3.$$

$$P(\underline{E}_6 \leq 14) = 88\% \text{ (zie tabel normale verdeling).}$$

Verbeteringen en verfijningen van PERT.

In enkele opzichten zijn verbeteringen en verfijningen van de oorspronkelijke PERT-versie mogelijk.

- 136 -

Lootsma stelt voor, gammaverdelingen aan te passen aan de tijdsduur i.p.v. betaverdelingen. Hij kiest dan wel $P[\underline{d} < a] = 0$, maar verwaarloost niet de staart van de verdeling rechts van b .

De gammaverdeling wordt bepaald door drie parameters

a - bepaalt de positie langs de x as

α - bepaalt de vorm

λ - bepaalt de schaal

Wij moeten α en λ zo bepalen, dat $\underline{d}$ de modus heeft bij m en zo dat $P[\underline{d} > b] \approx 1\%$. Lootsma gebruikt als benaderingen:

$$E(\underline{d}) = \frac{b + 5m}{6}$$

$$\alpha = \frac{E(\underline{d}) - a}{E(\underline{d}) - m}$$

$$\lambda = \frac{1}{E(\underline{d}) - m}$$

Hieruit volgt tevens

$$\text{var}(\underline{d}) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \left\{ E(\underline{d}) - m \right\} \left\{ E(\underline{d}) - a \right\}$$

Deze wijziging zou de berekening niet ingewikkelder, maar wel nauwkeuriger maken.

Tegen het gebruik van de betaverdeling pleit ook de studie van Simms, die in een praktijkstudie bij enkele organisaties een heel andere verdeling vond (zie Battersby - Carruthers). Het is echter nog een vraag, hoe gevoelig het uiteindelijke resultaat van het besturingsproces is voor fouten in de oorspronkelijke tijdschattingen. Soms moet het werken met drie schattingen i.p.v. één gezien worden als een verfijning.

Er schijnen echter ook situaties te zijn, waar het werken met drie schattingen het psychologisch effect heeft, dat de schatter niet de angst heeft te kunnen worden "opgehangen" aan zijn schatting en daardoor betere schattingen geeft

Als verfijningen kunnen de methoden gezien worden, die proberen ook de invloed te berekenen van de varianties langs de (volgens "simple version PERT") niet-kritieke paden op de berekeningen van E_i en L_i .

Lootsma ontwikkelt een dergelijke methode.

Hij doet twee veronderstellingen:

- 137 -

- de aktiviteitsduren hebben onafhankelijke kansverdelingen (aan welke veronderstelling, zoals hij zelf opmerkt, vaak niet voldaan is)
- de vroegst mogelijke tijdstippen zijn bij benadering normaal verdeeld.

Lootsma gebruikt de formules van C. Clark (1961). Verder voert hij dummies in om te bereiken, dat in een mijlpaal nooit meer dan twee pijlen aankomen. Op deze basis wordt een exacte berekening opgezet voor gemiddelde en variantie van de tijdstippen E. Lootsma heeft daarna door simulatie de berekening getoetst.

Twee verschillende netwerken werden elk 10.000 maal doorge-rekend; de aktiviteitsduren werden getrokken uit gammaverdelingen.

De conclusies zijn:

- deze "extended version" is ingewikkeld en tijdrovend zelfs op een computer en minder gemakkelijk te begrijpen voor de mensen in het bedrijf
- de "extended version" geeft goede resultaten voor de verwachte waarde van de vroegst mogelijke tijdstippen, maar in de varianties treden nog grote fouten op
- de fouten, die met PERT-simple version worden gemaakt, blijken echter niet zo belangrijk te zijn, dat zij in het algemeen een zo ingewikkelde methode rechtvaardigen (bij de voorbeelden van Lootsma: max 5 weken op een totaal van 3 jaar).

Als belangrijke foutenbron bij de PERT-calculatie wordt genoemd: afwijkingen in de pessimistische schatting b. Velen zijn van mening, dat de pessimistische schattingen over het algemeen te optimistisch zijn, dus een veel hogere overschrijdingskans hebben dan 1%. Lootsma stelt, dat de afwijkingen, die daardoor ontstaan in de vroegst mogelijke tijdstippen, veel groter zijn dan "maximalisatie-afwijkingen". Een numeriek voorbeeld moge dit toelichten:

a	m	b
1	3	9

Aangepaste gammaverdeling voor
 $P[\underline{d} > b] = 1\%$ betekent:
 $E(\underline{d}) = \frac{b + 5m}{6} = 4$

- 138 -

Indien zou gelden $P[\underline{d} > b] = 5\%$, dan is beste schatting:

$$E(\underline{d}) = \frac{b + 3m}{4} = 4,5$$

De afwijkingen in de schatting van de varianties is nog groter:

$$\text{" 1% " : } V = (4-3) (4-1) = 3$$

$$\text{" 5% " : } V = (4,5-3) (4,5-1) = 5,2$$

Een tweede voorbeeld:

a	m	b		$E(\underline{d})$	$var(d)$
5	20	38	"1%"	23	54
			"5%"	24,5	88

O.i. blijkt hieruit niet, dat PERT een ongeschikte methode is, maar wel hoe gevoelig het resultaat is voor bepaalde afwijkingen. Een aantal auteurs stelt echter wel, dat door al deze moeilijkheden het vaak doelmatiger is, de informatie, die uit de drie verschillende schattingen a, m en b kan worden gehaald, niet te gebruiken en uit te gaan van één schatting van de tijdsduur, die men dan tevens als norm hanteert en aanduidt als de geplande tijdsduur.

12.5 Het proces van planning en besturing.

Een beschrijving en analyse van het proces van planning en besturing en de rolverdeling daarbij zou ons op het gebied van de organisatieleer brengen. Het is echter essentieel, dat de netwerkmethode niet alleen dient om een eerste plan te maken, maar ook om de voortgang steeds te signaleren en te besturen. Het netwerk is bij uitstek een middel om de communicatie in dit proces te vergemakkelijken. Niet voor niets betekent PERT: programmevaluation and review technique. Raborn, die het Polaris-project leidde, stelt (1963):

"Program evaluation is the continuous process of appraising total performance and progress at a given level of responsibility against time-scheduled, end-item objectives and reporting to the next higher level of management".

Het is goed te weten, dat juist Raborn zegt:

" Highly motivated people have proven to be the first key to Polaris succes".

Programma's van het type PERT-COST leveren, naast de gebruikelijke resultaten:

- de som van de werkelijke kosten tot heden
- de som van de kosten volgens plan voor alle activiteiten, die tot heden voltooid zijn
- de voorspelling van verwachte totale projekt-kosten.

Battersby geeft enkele cijfers over de kosten van het systeem zelf.

Vaak heeft de leiding een "master" netwerk, dat voor de verschillende afdelingen of toeleveranciers verder is opgesplitst.

Voor CPM en kleine omvang is geen computer nodig, wel voor grotere projecten en voor programma's als PERT, LESS, RAMPS.

12.6. Verkorten van de projektduur.

Soms wenst men de projektduur te verkorten t.a.v. de in eerste instantie gevonden projektduur. In theorie kan men zich zelfs afvragen: wat is de optimale projektduur? De krachtigste methode, om de projektduur te verkorten is wijziging van het netwerk of zelfs wijziging van de constructie.

Ook kan men zich, voor elk van de activiteiten op het kritieke pad, afvragen: wat is de beste methode om de tijdsduur met 1 dag te verkorten; begin dan met goedkoopste verkorting. Moeilijkheid: al doende kunnen nieuwe kritieke paden ontstaan.

12.7. Capaciteitsbeperkingen.

De grootste complicatie, die men in de praktijk vaak ontmoet, wordt gevormd door de capaciteitsbeperkingen. Het programma RAMPS (Resource Allocation and Multi Project Scheduling) geeft een optimale oplossing, echter voor problemen van beperkte omvang. Voor problemen van grote omvang zijn op enkele plaatsen programma's ontwikkeld die althans tot een overzicht van de situatie leiden. Men moet er vooral tegen waken, dat het gebruikte systeem te ingewikkeld is voor de gebruiker en daardoor de

belangstelling van de leiding zelf verliest om slechts te worden tot een jachtterrein voor specialisten.

Battersby-Carruthers geven een analytische beschouwing van de hierboven bedoelde programma's met heuristische regels. Zoals bij alle OR-problemen is ook hier een kernvraag: wat is de objectfunctie die men wil minimaliseren? In de objectfunctie zouden bv. kunnen voorkomen:

- het kwadraat of de absolute waarde van het verschil tussen benodigde en aanwezige capaciteit per capaciteitsgroep per periode
- de verandering in gebruikte capaciteit van periode tot periode, per capaciteitsgroep
- de maximaal van een capaciteitsgroep benodigde capaciteit in enige periode.

Wat men verder wenst is een algemeen geldig, streng maar toch praktisch bruikbare algoritme; zo'n programma is er tot op heden niet. Er bestaan wel een aantal programma's, die volgens heuristische regels activiteiten inplannen in gegeven capaciteiten. Vrijwel al deze programma's voeren eerst een rekengang uit, die een normale kritieke-pad-berekening per project uitvoert en daarbij grootheden berekent zoals vroegste resp. laatste start of einde, diverse soorten spelingen. Daarna wordt elke capaciteitsgroep periode na periode volgepland met activiteiten. Hooper onderscheidt daarbij drie soorten programma's (zie Carruthers - Battersby):

- a) "serial" -alle activiteiten worden één maal in een bepaalde volgorde gezet; bij het volplannen van een periode wordt in die volgorde onderzocht, of ze in aanmerking komen
- b) "parallel" -vorm de verzameling van activiteiten, die in aanmerking komen om in de eerste periode te worden ingepland; zoek daarvan de beste; zoek daarna uit de resterende verzameling weer de beste etc., totdat de capaciteit gevuld is.
- c) "serial-parallel" -tussen a) en b) in.

Carruthers - Battersby vermelden een uitvoerige vergelijkende studie van Pascoe; deze heeft een aantal programma's beproefd op netwerken van verschillend karakter en voor 5 verschillende objektfuncties. Hoofdconclusies waren volgens Carruthers - Battersby:

- "parallel" -methoden zijn significant beter (maar nemen ook meer tijd)
- in kleine netwerken kan men in het algemeen de activiteiten het beste inplannen in volgorde van laatst toelaatbaar einde, in grote netwerken in volgorde van laatst toelaatbare start.

Zoals reeds werd gezegd is geen van de nu bestaande programma's algemeen optimaal, zodat altijd een tegenvoorbeeld kan worden geconstrueerd. Ter illustratie de twee netwerken uit fig. 42, die men het beste niet in volgorde van minste speling moet inplannen

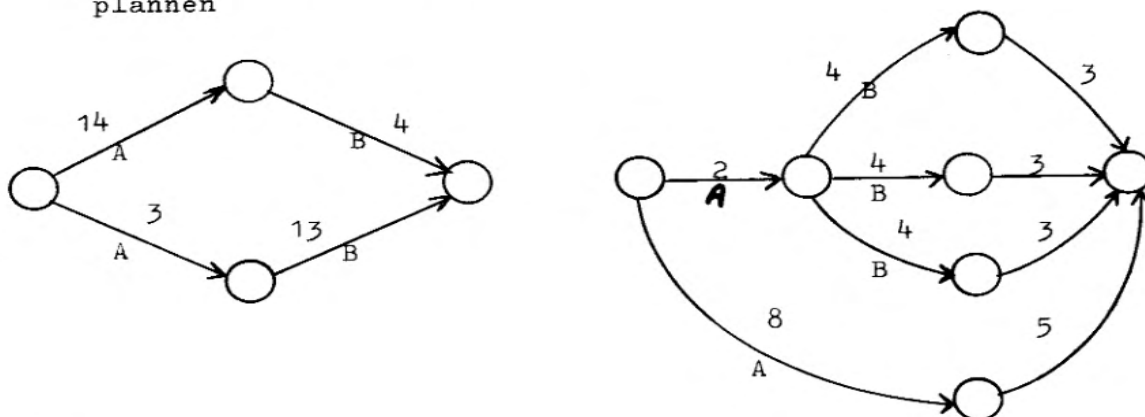


Fig. 42.

12.8. Verwachte verdere ontwikkeling.

Een aantal technieken is nauw verwant aan de kritieke-pad-methode. Ontwikkeling van deze technieken zal op den duur wellicht leiden tot betere methoden van capaciteitstoewijzing en volgordekeuze. Gedacht wordt aan:

- lineaire programmering (mixed integer)
- dynamische programmering
- volgorde-bepaling (regel van Johnson etc.)

- 142 -

In de literatuur zijn vele toepassingen van netwerkmethoden beschreven; o.a. Battersby geeft een overzicht. Verdere aansluiting op de theorie van de loketwachttijden lijkt veelbelovend. Inzicht in het verband tussen levertijd en kosten begint te ontstaan.

Literatuurlijst netwerkmethoden.Leerboeken.

- 1) A. Battersby - "Network analysis" Mc. Millan 1964; Marka 56. xx
- 2) Federal Electric Corporation - "Programmed introduction to PERT" Wiley 1963.
- 3) A. Kaufmann en G. Desbazeille - "La methode du chemin critique" Dunod 1964.
- 4) K.G. Lockyer - "An introduction to critical path analysis" x
London 1964.
- 5) R.L. Martino - "Finding the critical path AMA 1964.
- 6) R.L. Martino - "Applied operational planning" AMA 1964.
- 7) Dept. of the Navy - "PERT Summary Report" Washington 1958.
- 8) Y.J. Moder en C.R. Phillips - "Project management with CPM and x
PERT" New York 1964.
- 9) H. Wille, K. Gewald en H.D. Weber - "Netzplantechnik" Oldenbourg
1966.

Overige boeken en artikelen.

- 1) R.W. Miller - "Schedule, cost and profit control with PERT"
Mc. Graw Hill 1963.
- 2) S.M. Selig en M. Ettelstein - "New horizons in industrial
engineering" Baltimore 1963.
- 3) CEIR - "RAMPS; training text" Brentford 1965.
- 4) J.H. de Bruin - "PERT-planning" Arbeidskundig Tijdschrift dec.
1962.
- 5) W. Budil - "De Praxis der Netzplan technik" Industrielle Organi-
sation 32 (1963) nr. 11
33 (1964) nr. 8.
- 6) J.A. Carruthers en A. Battersby - "Advances in critical path
methods" OR quarterly 17, nr. 4 p. 359-380.
- 7) C.E. Clark - "The greatest of a finite set of random variables"
JORSA 9 (1961) nr. 2, p. 145-162.
- 8) D.R. Fulkerson - "A network flow computation for project cost
curves" Man. Science 7 (1961) jan.
- 9) W.A. Heuser en B.E. Wynne - "An application of the CPM to job
shop scheduling" Man. Techn. 3 (1963) nr. 2.

- 144 -

- 10) F.J. van Houten, G.M. Nijssen en J.G. Tromp -"Hebben PERT en CPM niet te veel belangstelling?" Informatie 10 (1968) nr. 2, p. 20-26.
- 11) J.E. Kelley en M.R. Walker -"Critical path planning and scheduling" Proc. Eastern Joint Computer Conference, Boston 1959, pag. 160.
- 12) J.E. Kelley -"Critical-path planning and scheduling: mathematical basis" Operations Research May-June 1961.
- 13) S. Lambourn -"RAMPS" Computer Journal 5 (1963) pag. 300.
- 14) S. Lambourn -"Capaciteitsplanning met behulp van de netwerk-methode" (verslag door U.Duyne) Informatie, april-mei 1965.
- 15) F.K. Levy e.a. -"The ABC's of the critical path method" Harv. Bus. Rev. 41 (1963) nr. 5.
- 16) F.A. Lootsma -"Network planning with stochastic activity durations, an evaluation of PERT" Statistica Neerlandica 20 (1966), 1, p.43-70.
- 17) D.G. Malcolm e.a. -"Application of a technique for research and development program evaluations" JORSA 1959 nr. 5.
- 18) J.L. Marchbanks -"Daily automatic rescheduling technique" Journal Ind. Eng. XVII (1966) nr. 3.
- 19) J.P.J. Nabben -"De Metra-Potentiaal Methode" Mededelingen S.O.R. december 1967.
- 20) P.F. Reith -"Project-planning methoden" Stat. Neerl. Vol. 17 (1963) pag. 137.
- 21) B. Roy -"Graphes et Ordonnancements" Rev. Franç. de R.O. 6 (1962), 4e trimestre, nr. 25, p. 323.
- 22) W.F. Raborn -"Management of the navy's fleet ballistic missile program" Hoofdstuk 13 uit "Science, technology and management, hoofdredactie F.E. Kast en J.E. Rosenzweig, Mc Graw Hill 1963.
- 23) S.S.A.A. -"Inleiding tot de planning met de netwerkmethode" Samson 1966.
- 24) J.P. Verseput -"Critical path planning bij raffinaderij-onderhoud". De Ingenieur 78 (1966) nr. 10.
- 25) H.M. Vullingsh - T.E.D. 34 (1964) nr. 14.
- 26) H.M. Vullingsh -"Netwerkplanning in de praktijk" Informatie mrt. 1965.
- 27) H. Walton -"Experience of the application of the critical path method to plant construction" O.R. quart. 15 (1964) nr. 1.
- 28) K. Weber -"Projektanalyse mit PERT" Industrielle Organisation 36 (1967) nr. 5 p. 184-194.
- 29) C. Westra -"Het samenstellen van tijdschema's m.b.v. elektronische rekenmachines". De Ingenieur 27-7-1962.

13. Bestelsystemen.

In dit hoofdstuk en het volgende worden voorraadproblemen besproken. In hoofdstuk 10 is reeds een overzicht gegeven van de verschillende soorten voorraad.

In dit hoofdstuk zullen wij eerst de afname nader beschouwen en daarna de voordelen van systematiek (welke dan ook). Tenslotte worden de verschillende mogelijke bestelsystemen aan de orde gesteld.

13.1. Eigenschappen van de afname.

Beschouwingen per voorraadpost.

Aansluitend op wat reeds in hoofdstuk 9 werd behandeld, kunnen we enkele veronderstellingen opsommen, die ter benadering van de werkelijkheid wel gebruikt worden:

a. Stationaire situatie.

Opeenvolgende afnamecijfers worden beschouwd als onderling onafhankelijke trekkingen uit dezelfde frequentieverdeling. Onder dit hoofd vallen het Poissonproces en het quasi-Poissonproces (zie hoofdstuk 11). Als algemeen geldende formule geldt de onderstaande.

Stel het aantal orders $\underline{A}$ per periode volgt een bekende (discontinue) kansverdeling (μ_A, σ_A) .

Stel de ordergrootte $\underline{B}$ volgt eveneens een bekende verdeling (μ_B, σ_B) *). Wanneer nu $\underline{A}$ en $\underline{B}$ van elkaar onafhankelijk zijn en geen autocorrelatie vertonen, geldt voor de afname $\underline{C}$ in aantallen stuks per periode

$$\begin{aligned}\mu_C &= \mu_A \cdot \mu_B \\ \sigma_C^2 &= \mu_A \sigma_B^2 + \mu_B^2 \sigma_A^2\end{aligned}$$

De afleiding is gegeven in appendix F.

- *) Strikt genomen volgt $\underline{B}$ een discrete verdeling; de bewering geldt in principe echter eveneens voor een continue benadering.

- 146 -

N.B. Deze formule is niet symmetrisch; wij beschouwen ook niet de situatie $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$.

Het proces is:

- doe een trekking $\underline{A}$.
- doe $\underline{A}$ malen een trekking $\underline{B}$.
- de som van deze waarden $\underline{B}$ is $\underline{C}$.

Als speciale gevallen kunnen bv. worden gekozen:

- ordergrootte constant
- aantal orders constant
- aantal orders Poissonverdeeld

b. Niet-stationaire situatie.

Het voert ons in dit college te ver, daarop in te gaan. Men realiseert zich echter, dat zeer vele werkelijke afnamereeksen dit karakter hebben. Soms is, over een korte periode, benadering met een stationair model toelaatbaar. In de praktijk blijkt de opdracht echter vaak te zijn: ontwerp een adaptief bestelsysteem.

c. De afname beschouwd als een geregelde grootte in de zin van de regeltechniek.

Let in deze hoofdstukken zelf goed op, welke veronderstelling is gebruikt.

Beschouwingen voor het assortiment.

Enkele eigenschappen, die soms van nut kunnen zijn bij de beheersing van een groot aantal voorraadposten zijn de volgende.

In vele gevallen blijkt voor een homogene groep van artikelen correlatie te bestaan tussen de hoogte van de gemiddelde afname en de standaarddeviatie van de toevallige afwijkingen daar omheen. Vaak kan men dit verband benaderen door de functie $\sigma = c\mu^p$; op dubbellog papier uitgezet ontstaat dan een rechte lijn.

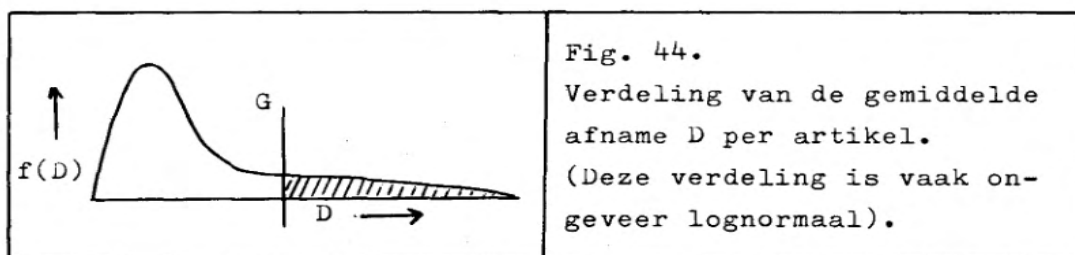
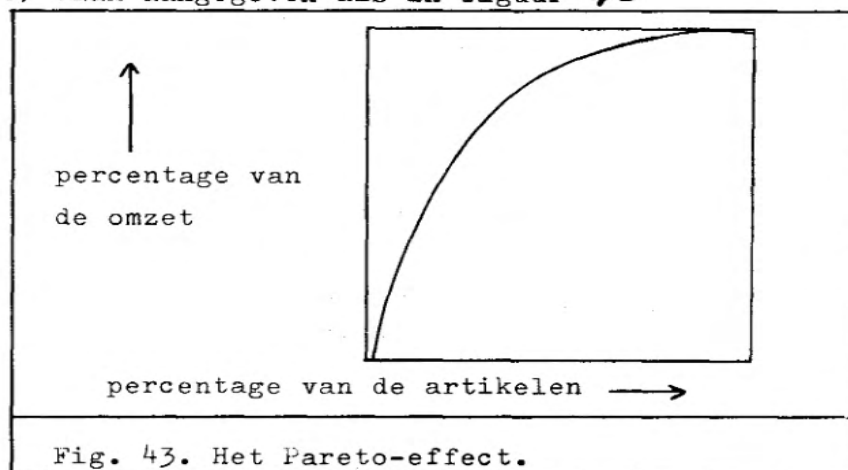
Een assortiment artikelen kan worden geanalyseerd door alle artikelen in volgorde van omzet op een lijst te zetten (is het aantal groot, dan kan met een steekproef uit de artikelen worden volstaan). De omzet kan daarbij worden uitgedrukt in geld, in aantal stuks of in uren gevraagde capaciteit. Neemt men nu de bovenste x% regels

- 147 -

van de lijst, dan heeft men meer (meestal: veel meer) dan $x\%$ van de omzet. Dit effect wordt wel aangeduid als 20 - 80 regel omdat in vele gevallen 20% van de artikelen reeds ongeveer 80% van de omzet bevat; ook andere waarden komen echter voor. In de literatuur spreekt men ook wel over het ABC principe. Men doelt dan op een indeling van alle artikelen in 3 groepen:

- A een paar artikelen met hoge omzet
- C een groot aantal artikelen met lage omzet
- B de middengroep

In vele gevallen is het zinvol, b.v. de C artikelen anders te behandelen dan de A artikelen; bijv. andere methodes voor voorspellen, bestellen, voorraadadministratie. In de literatuur vindt men het ABC effect (of Pareto-effect) vaak aangegeven als in figuur 43



- 148 -

Indien men de waargenomen verdeling van jaaromzetten D voor het gehele assortiment weergeeft als in figuur 44 kan exacter worden aangeduid wat langs de assen in fig 43 is uitgezet en wel als volgt:
Langs de horizontale as van figuur 43 (let wel! Niet fig 44) staat, op een lineaire schaal:

$$100 \int_G^{\infty} f(D) dD; \text{ dit is het percentage artikelen met een jaaromzet } > G$$

In verticale richting is uitgezet

$$100 \frac{\int_G^{\infty} D f(D) dD}{\int_0^{\infty} D f(D) dD}; \text{ dit is het percentage van de omzet ingenomen door de artikelen met een jaaromzet } > G$$

In het algemeen kan het Pareto-effect als volgt worden omschreven:

- gegeven is een verzameling objecten
 - elk object is de drager van een kenmerk z
 - rangschik de objecten naar volgorde van afnemende z
 - de eerste $x\%$ van de objecten zal een veel groter deel dan $x\%$ vertegenwoordigen van de totale waarde $\sum z$ over alle objecten.
- Een aantal toepassingen van het principe is hieronder weergegeven:

object	kenmerk
artikel	jaaromzet
artikel	bijdrage in de winst
artikel	hoeveelheid voorraad
artikel	benodigde omsteltijd per jaar
gezinshoofd	jaarinkomen
land	nationaal inkomen
categorie kwaliteitsfout	aantal fouten per week

13.2. Voordelen van systematiek.

In veel gevallen is bij voorraadproblemen primair: bestuurbaarheid. Pas daarna komt het streven naar een optimale situatie, die men immers zonder bestuurbaarheid nimmer bereikt. Als voordelen van systematiek kunnen worden genoemd:

- er kunnen normen gesteld worden (bijv. voor de voorraadhoogte)
- delegatie is mogelijk
- terwijl toch het gewenste beleid wordt gevoerd
- systematisch streven naar minimale totale kosten
- gebruik van computers wordt mogelijk.

Gevolg hiervan is, dat de "span of control" en de "depth of control" kunnen worden vergroot. Om een ander beeld te gebruiken: de bedrijfsleiding krijgt de functie van kapitein van een schip, niet die van chauffeur van een auto. Bij een auto beslist de chauffeur op ieder moment zelf, hij houdt steeds het stuur in handen. Bij een schip geeft de kapitein de koers aan; een regelsysteem zorgt ervoor, dat deze koers wordt aangehouden.

Als we naar een bedrijf kijken dat zich ontwikkelt van klein naar groot, kunnen we bij het bestellen drie fasen onderscheiden.

1e fase: De beslissing wordt voor ieder geval afzonderlijk genomen.

2e fase: Een of ander formeel systeem begint te groeien.

3e fase: Het formele systeem wordt geoptimaliseerd.

13.3. Indeling bestelsystemen.

Bij de beschouwing van bestaande en nog te bedenken bestelsystemen kan men op verschillende manieren onderverdelingen aanbrengen.

Wij spreken van bestellen op order wanneer pas dan een artikel (of onderdeel) wordt aangevoerd resp. geproduceerd, indien daarvoor een klantenorder is binnengekomen.

Voorbeeld: bouw van een schip.

Merk echter op, dat sommige onderdelen van het schip wellicht uit voorraad worden betrokken; de vraag "op order of uit voorraad?" moet dus per voorraadpost gesteld worden.

Wij spreken van bestellen op voorraad en levering uit voorraad als aan de klantenorders wordt voldaan uit de voorraad, terwijl de voorraad op peil wordt gehouden door aanvullingsorders. De fabriek maakt dan een bepaald produkt, zonder de bestemming (de afnemer) ervan tevoren te kennen.

Een belangrijke plaats wordt ingenomen door bestel systemen voor halffabrikanten en onderdelen, die door Burbidge worden aangeduid als "programme-controlled systems". Weliswaar maakt men bij deze systemen het eindprodukt op voorraad, maar de fabrikanten van onderdelen en halffabrikanten leveren in principe op order aan de montage-afdeling. Deze situatie komt in de industrie veel voor. Daarom zal onder het hoofd "bestellen op order" in paragraaf 13.4 enige aandacht aan deze bestelsystemen gewijd worden.

Een situatie, die veel lijkt op de voorgaande is die, waar de fabriek in feite de verkoopvoorspelling van de commerciële afdeling voor een bepaalde periode interpreteert als een productie-opdracht voor die periode (zie fig. 45). De terugmelding van de werkelijke verkoop vindt in die situatie met grote vertraging plaats. Gevolg: onevenwichtige verdeling van voorraden; artikelen die boven verwachting goed lopen, zijn steeds buiten voorraad evenals grondstoffen en onderdelen voor die artikelen. Bij een bestelmethode, die echt op voorraad werkt en uit voorraad levert, werkt de werkelijke verkoop onmiddellijk in op het systeem (zij het eventueel gefilterd en gedempt) (zie fig. 46).

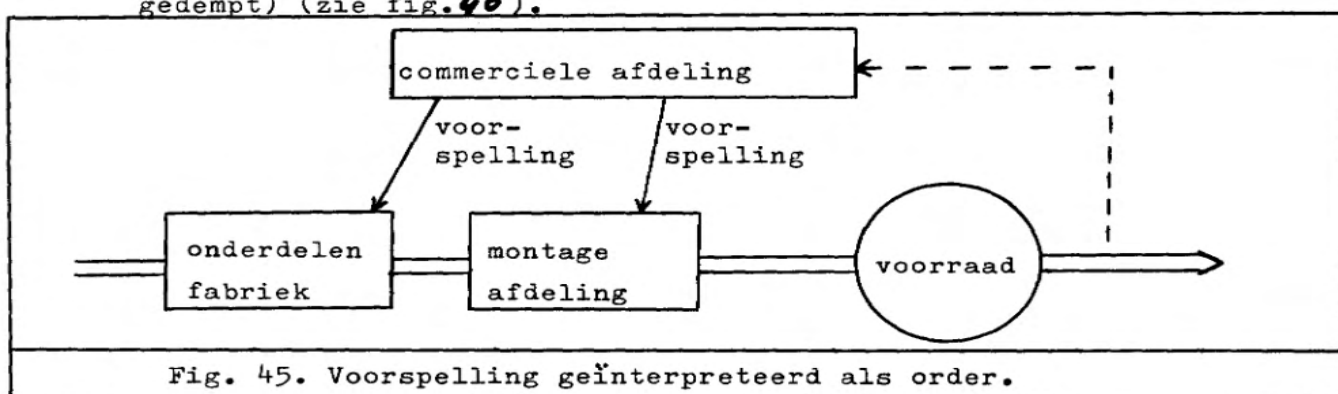


Fig. 45. Voorspelling geïnterpreteerd als order.

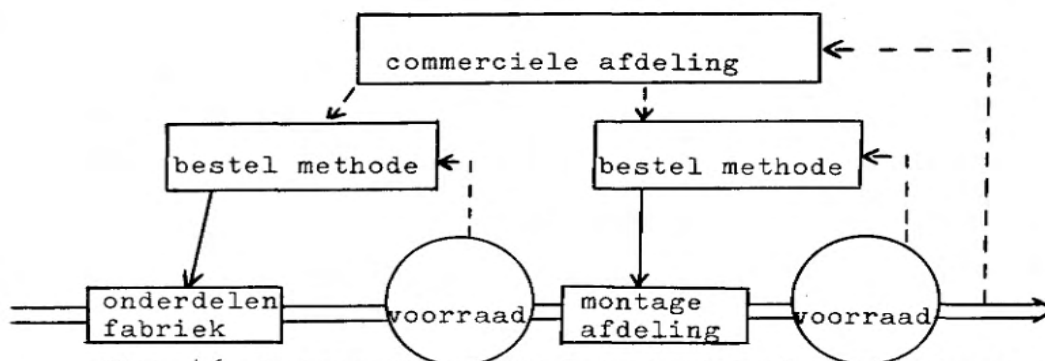


Fig. 46. Voorspelling dient om voorraadnorm te bepalen.

- - - = stroom informatie ⇒ = stroom goederen
 ——— = stroom fabricageopdrachten

Het merendeel van de theoretische verhandelingen blijkt de situatie te bestuderen van slechts een enkel voorraadpunt, op zichzelf beschouwd. De zo afgeleide resultaten kunnen alleen als benaderende oplossingen gebruikt worden voor de werkelijke situatie waarin haast altijd een aantal voorraadpunten als systeem voorkomt, d.w.z. met onderlinge relaties in serie dan wel parallel, vaak beide gecombineerd. In dit college kunnen de moeilijkheden, die ontstaan als men rekening houdt met parallel- en serieschakeling, slechts vluchtig worden aangeduid.

Tabel. Voorbeeld "periodiek systeem"

week	planning montage	af te leveren aan montage	planning productie onderdelen	af te leveren grondstof aan ond.fabr.
1	-	-	-	-
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-
6	-	-	-	50
7	-	-	50	50
8	-	50	50	50
9	50	50	50	50
10	50	50	50	?
11	50	50	?	?
12	50	?	?	?

Ga zelf na, wat er gebeurt, als in week 12 door ziekte de montage slechts 25 is. Wat gebeurt er dan bij toepassing van een (B,q) methode (zie pag. 156)?

Indien de klant een bepaald aantal exemplaren van een artikel bestelt, ontstaat het probleem van de optimale toeslag. In de meeste gevallen ontstaat een voorraad overschot. Voorbeeld: de klant bestelt 1000 stuks, onze gemiddelde uitval is 10%. Hoeveel stuks in produktie nemen?

Als voorbeeld van een "programma-controlled" systeem bepsreken we (zie tabel) nu het periodiek systeem, dat in de industrie veel wordt aangetroffen en o.a. door Burbidge wordt beschreven.

Onderdelen worden pas door (of namens) de montagefabriek besteld bij de onderdelenleverancier, indien het definitieve montageprogramma bekend is. Dit montageprogramma moet dus zo lang tevoren bekend zijn, dat het onderdeel met de langste levertijd nog tijdig kan worden aangemaakt. Deze wijze van bestellen lijkt geschikt voor onderdelen van eindprodukten, die in series worden geproduceerd en waarbij de series niet te groot zijn. Zelfs dan bij voorkeur wel op voorraad leggen: grondstoffen of onderdelen die

- een lange levertijd hebben
- universeel aanwendbaar zijn.

Bij het periodiek systeem wordt de tijd verdeeld in periodes van ongeveer gelijke lengte. (Deze periodes zijn dus voor alle onderdelen dezelfde). Voldoende lang van tevoren wordt telkens een definitief montageprogramma opgesteld voor een of meer periodes. De bestelserie voor een onderdeel is nu steeds: de hoeveelheid van dat onderdeel, die in een bepaalde periode nodig is.

Bij de bepaling van de gewenste toeleverdatum wordt enige speling in acht genomen. Daardoor zal gemiddeld genomen elke serie enige tijd te vroeg ter beschikking zijn.

Wanneer men dit periodiek systeem toepast voor alle componenten, onderdelen en grondstoffen, zit de onderdelenleverancier "opgesloten" tussen de toeleverdatum van zijn eigen grondstoffen en de afleverdatum van zijn produkten. Ook bij toepassing van dit bestelsysteem ontstaat natuurlijk voorraad, want (o.a.):

- er is een seriegrootte-effect
- gemiddeld genomen komt elke serie te vroeg
- de werkelijke montage-hoeveelheid wijkt af van de geplande
- de werkelijke uitval en afval wijken af van de verwachte waarden.

Men zal van tijd tot tijd de voorraad dus moeten opmeten teneinde de bestellingen te kunnen bijregelen, daarvoor bestaan verschillende methodes.

Het periodiek systeem, dat hierboven globaal is beschreven, vereist weinig papier en bestelt de onderdelen in uitgebalanceerde hoeveelheden. Past men dit systeem echter toe bij montage van langlopende series of continue montage, dan dreigt een aantal gevaren:

- men kiest voor alle onderdelen een even grote produktiefrequentie; dit is niet altijd optimaal
- lange levertijd voor het eindprodukt [d.w.z. indien het eindprodukt uit voorraad wordt geleverd, moet die voorraad een lange levertijd van de voorraadaanvullingsorders kunnen overbruggen].
- detailplannen worden lang tevoren opgesteld.
Zij hebben hun geldigheid verloren als de geplande leverdata aanbreken. Daardoor dreigt de waarde van de afgesproken leverdata verloren te gaan terwijl anderzijds drukke informatiewisseling ontstaat over onderdelen die eerder nodig zijn dan men dacht.
- centrale leiding in te grote mate van detaillering.
- alle orders voor een bepaalde periode hebben dezelfde dag als leverdatum. Door beperkingen van transport- en produktiecapaciteit echter komen ze in de praktijk na elkaar gereed.

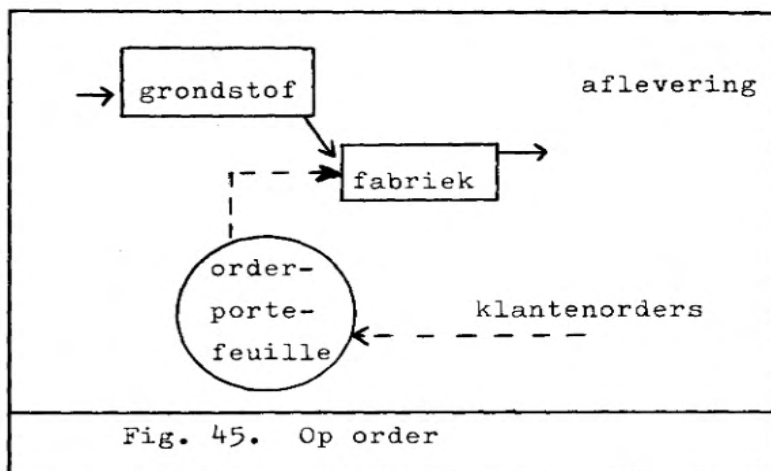
13.5. Een gemengd systeem is mogelijk.

De twee meest extreme systemen zijn òf op voorraad werken òf op order. Dat wil zeggen, bekijk het artikel en stel de vraag: Gaan we dit artikel in principe uit voorraad leveren? Met een voorbeeld zal een en ander geïllustreerd worden voor eindprodukten.

Een kolenkittenfabrikant levert 10 types kolenkitten.

Een van die tien maakt 90% van de omzet uit.

Welke alternatieven heeft de fabrikant bij het besturen van zijn produktieproces? Een extreme oplossing is alles op order maken.



Voor alle types komen de orders in de order-portefeuille, waardoor een hoeveelheid wachtende orders zullen ontstaan.

De nadelen zijn:

1. De levertijd wordt lang door wachttijd en produktietijd.
2. De levertijd is fluctuerend en vooraf niet bekend, dus de levertijd is onbetrouwbaar.
3. Als de orders in volgorde van binnenkomst behandeld worden zullen de produktie-series on-economisch zijn.

De orders voor één type kunnen opgespaard worden tot er een behoorlijk aantal tegelijk gemaakt kan worden; dit betekent nog eens een perronwachttijd. Dus versterking van nadeel 1 en 2.

Welke alternatieven zijn er? Als de fabrikant een gelijkmatige bezetting van de capaciteit wil hebben met een constante levertijd dan kan hij een voorraad aanleggen, en wel een buffervoorraad of een anticipatie-voorraad.

Het is duidelijk dat deze voorraad zal bestaan uit kisten van dat type, dat het meest gevraagd wordt. Dat type zal als gevolg daarvan in een groot gedeelte van de gevallen uit voorraad geleverd kunnen worden. De volgende stap is, te besluiten dat/principiëel uit voorraad geleverd zal worden $\angle$ dit type (een uitgangspunt)(hogere voorraad nodig). De mogelijkheid om voor de andere soorten een kortere levertijd te krijgen is nu aanwezig, omdat hieraan prioriteit gegeven wordt bij de produktie.

- Wij hebben nu:
- a) Van het voornaamste type een zeer korte constante levertijd (levering uit voorraad)
 - b) Voor de overige types een kortere en constante levertijd (korte wachttijd + bewerkingstijd).

- 155 -

Dit is echter nog niet ideaal, omdat de series niet economisch zijn, zodat nu nog te vaak van het ene type op het andere omgeschakeld moet worden.

Een volgende stap is dan ook: als voor een type een bestelling binnenkomt waaraan niet uit voorraad kan worden voldaan, dan wordt van dat type een optimale serie geproduceerd. Er wordt dus wel op voorraad gewerkt, doch men garandeert geen levering uit voorraad. De laatste stap is: alle types uit voorraad leveren. Hebben we een zeer groot aantal artikelen, dan nemen we geen extreme vorm, maar een tussenvorm.

We kunnen bijvoorbeeld voor een assortiment gelijksoortige artikelen aansluiten op het A-B-C principe.

	Uit voorraad	Op voorraad	Op order	Orderkosten per geval toe- rekenen aan afnemer
A	ja	ja	neen	neen
B	neen	ja	neen	neen
C	neen	neen	ja	ja

Voor A en B artikelen worden de orderkosten op basis van de normale serie al toegerekend.

Indien een leverancier (producent) dit schema volgt, is het zinvol dit bekend te maken, zowel aan de klanten als intern. Als de klanten dit weten, zal er neiging zijn om van produkt C naar produkt B over te stappen (kostenoverwegingen). Idem zal de neiging ontstaan om B te vervangen door A (levertijd-overweging).

13.6. Op voorraad; 1 voorraadpunt.

Terwille van de bespreking in dit college zullen wij de bestelsystemen verdelen in twee hoofdgroepen:

- bestelsystemen voor intermitterende aanvoer
- bestelsystemen voor continue aanvoer.

Bestelsystemen voor intermitterende aanvoer.

De beslissingsregels die hiermee samenhangen kunnen naar twee gezichtspunten worden ingedeeld:

- 156 -

- 1) Kunnen op elk moment bestellingen geplaatst worden, of bestaat de mogelijkheid daartoe slechts periodiek (b.v. aanvoer per boot uit een ander land)?
- 2) Als een artikel besteld wordt, wordt dan de te bestellen serie mede bepaald op grond van de voorraad die op het moment van bestellen aanwezig is, of niet?

Een overzicht krijgen we in de volgende tabel:

	bestelserie onafh. van voorraad op p mo- ment van bestellen	bestelserie afhankelijk
Doorlopend mogelijk- heid van bestellen	(B,Q)	(B,S)
periodiek mogelijk- heid van bestellen	(s,Q)	(s,S)
	run-outlist	periodiek aanvullen

De (B,Q) beslissingsregel houdt in:

Zodra in een magazijn de economische voorraad van een artikel lager wordt dan een tevoren vastgestelde hoeveelheid B, wordt een hoeveelheid Q bijbesteld.

B = bestelniveau, Q = quantiteit. Q is niet afhankelijk van de hoogte van B. In de meeste gevallen blijft Q enige tijd onveranderd, daar slechts periodiek de te gebruiken seriegrootte opnieuw berekend wordt (indien nodig).

Indien Q niet verandert kan men stellen:

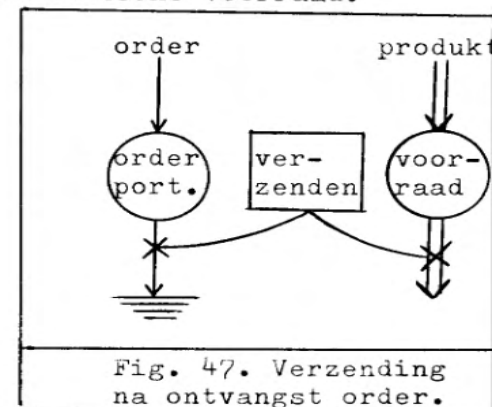
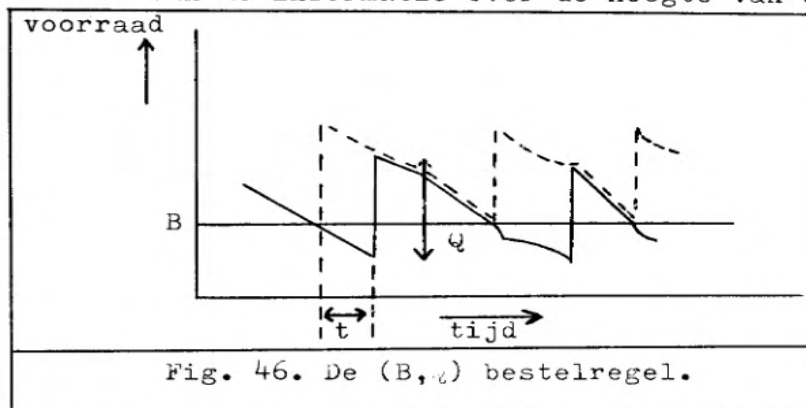
Het (B,Q) systeem is een bestelmethode, waarbij de voorraadhouder op variabele tijdstippen (niet tevoren bepaald) een vaste serie bij zijn leveranciers bestelt.

In figuur 46 zien we het (B,Q) systeem in grafiek. Als de economische voorraad lijn B snijdt, wordt er besteld. Na tijd t (levertijd) komt de bestelde hoeveelheid (Q) aan. De gestreepte lijn stelt de economische voor-

raad voor, de getrokken lijn de technische voorraad.

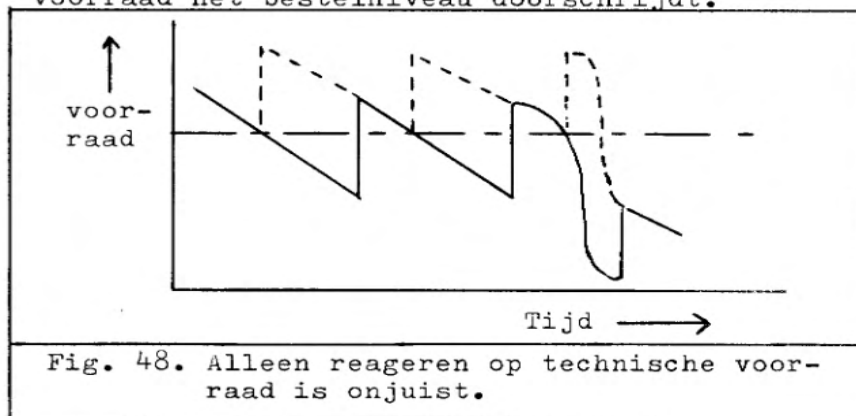
Economische voorraad = technische voorraad + bestelde voorraad - reserveringen binnen levertijd.

Essentiëel voor de werking van een bestelsysteem is de nauwkeurigheid van de informatie over de hoogte van de economische voorraad.



Wij nemen hierna verder aan, dat er geen reserveringen zijn.

Dat men moet reageren op de hoogte van de economische voorraad en niet op de hoogte van de technische voorraad moge nog blijken uit figuur 48, waar alleen besteld wordt wanneer de technische voorraad het bestelniveau doorschrijdt.

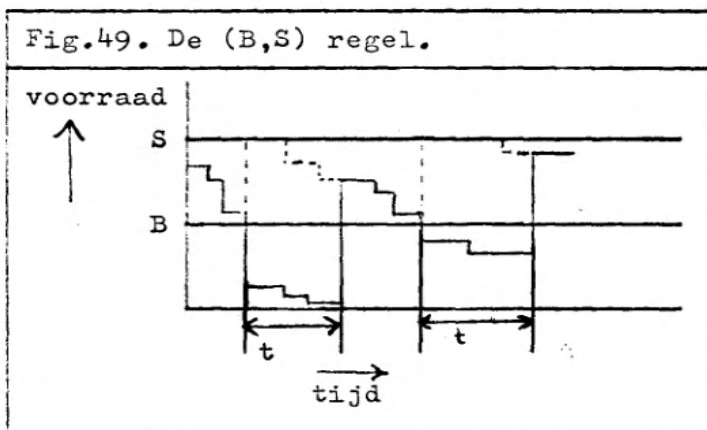


Eén van de vormen, waarin het (B, q) systeem kan voorkomen is het z.g. "two-bin system" (geen voorraadregistratie; hoeveelheid B in aparte bak opgeslagen).

De $(B-S)$ beslissingsregel.

Deze methode kan zinvol zijn als de afname plaats vindt met

onregelmatige orders, waarvan de grootte niet verwaarloosd mag worden ten opzichte van de seriegrootte Q .

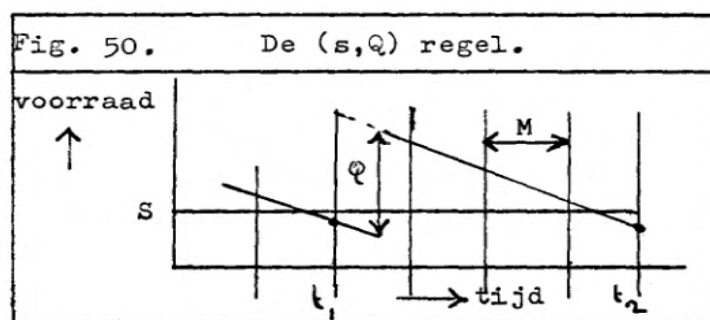


Zodra door levering aan een klant het voorraadpeil daalt beneden een niveau B, wordt een order geplaatst die de economische voorraad aanvult

tot niveau S (Stock). Hiermee wordt dus op variabele tijdstippen een variabele serie besteld. Deze variabele serie kan natuurlijk afgerond worden op $\backslash$ verpakkings- $\angle$ een aantal eenheden.

De (s,Q) beslissingsregel

Hierbij bestaat slechts periodiek de mogelijkheid tot bestellen. b.v. Iedere maandag, of iedere eerste van de maand. Als op zo'n moment de economische voorraad lager is dan een niveau s , bestelt men een vaste serie Q bij. Deze methode is slechts dan bruikbaar, als de verbruikstijd van de

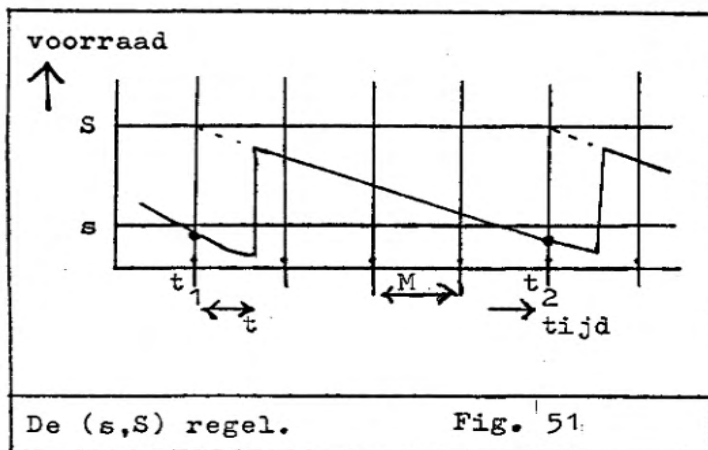


tijd van de serie Q enkele malen groter is dan het bestel-interval M . Op tijdstip t_1 en op tijdstip t_2 wordt besteld.

De (s,S) beslissingsregel

Het principe hiervan is, dat men periodiek, dus op vaste tijdstippen, kijkt of de voorraad beneden een niveau s is gekomen. Is dit het geval, dan bestelt men bij tot

tot aan niveau S .



Op tijdstippen t_1 en t_2 wordt bijbesteld. De bestelseries zijn afhankelijk van de restvoorraad op tijdstippen t_1 en t_2 . M = bestelinterval.

Een speciaal geval ontstaat, als men niveau s en S gelijk neemt. Men krijgt dan de methode van de periodieke bijvulling. Men bestelt net zoveel als er in de afgelopen periode afgenomen is.

∠ de andere systemen er speciale gevallen van zijn, immers:

In de literatuur heeft het (s, S) systeem veel aandacht gekregen. Reden hiervoor kan zijn dat het (S, Q) systeem is een (s, S) systeem met afronding achteraf naar een geheel aantal malen Q .

Het (B, S) systeem is een (s, S) systeem met een zeer kort bestelinterval M . (B, S) gaat over in (B, Q) als de vraag zeer continu verloopt, d.w.z. uit zeer veel kleine orders bestaat.

Bestelsystemen voor continue aanvoer.

Soms ziet men de volgende regel toegepast:

$$P_i = \frac{S_{i-1} + \dots + S_{i-12}}{12}$$

P_i is de geplande produktie in maand i .

S_{i-1} is de afname in de juist verstreken maand $(i-1)$.

De teller van de breuk is het M.A.T. (moving annual total).

Deze regel is onbruikbaar bij oplopende of aflopende trend.

Evenmin krijgt men goede resultaten met de regel

$$P_i = F \quad (F = \text{voorspelde afname}).$$

In deze regel ontbreekt nog steeds elke terugkoppeling.

Op enkele plaatsen boekt men goede resultaten alleen al door de afname en de produktie cumulatief in grafiek te brengen. In dezelfde grafiek kan de voorraad als verschil worden afgelezen.

Voor een stationaire afname is de eenvoudigste niveau-regel (regel van Magee):

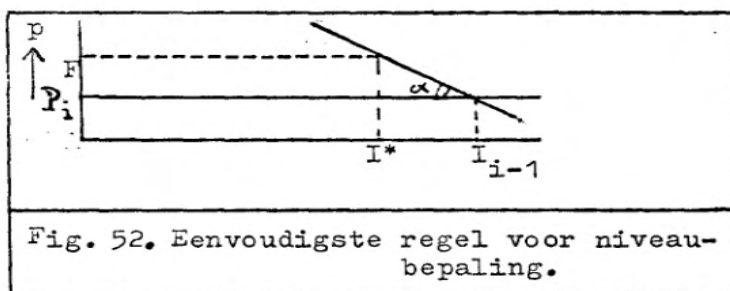
$$P_i = F + k(I^* - I_{i-1}).$$

Deze regel is in figuur 52 grafisch voorgesteld.

I^* = gewenste voorraad.

I_{i-1} = eindvoorraad van periode i .

k = constante tussen 0 en 1.



13.7. Op voorraad; voorraadpunten parallel.

Eén artikel; voorraadpunten parallel.

Tegelijk bestellen levert gewoonlijk voordeel op.

Als de bestelde serie aankomt, ontstaat een toewijzingsprobleem; de aangekomen produkten moeten worden verdeeld over de voorraadpunten.

Meer artikelen; voorraadpunten parallel; intermitterend.

Wij denken nu vooral aan de situatie, waarin in één magazijn een aantal verschillende artikelen op voorraad ligt.

Twee belangrijke complicaties kunnen zich nu voordoen:

- gecompliceerd kostenpatroon; wij krijgen te maken met twee soorten bestelkosten: per artikel en per groep van artikelen, die gezamenlijk besteld worden. Voorbeeld:

- 161 -

- het patroon van omstelkosten in een lampenfabriek. De variabele is niet meer de seriegrootte maar: de cycluslengte, resp. de bestelfrequentie voor elk artikel..
- gemeenschappelijke beperking op het gebied van kapitaal, ruimte, omsteltijd e.d. De methode van de multiplier van Lagrange biedt hier soms uitkomst; zie hoofdstuk 14. Voor alle artikelen tezamen kan een probleem van continue aanvoer ontstaan.

13.8. Op voorraad; voorraadpunten in serie; intermitterend.

Voor al de niet-stationaire vraag kan hier gevaarlijke verschijnselen veroorzaken. Wij beperken ons echter tot de stationaire afname. Zie Magee (1958) pag. 181 voor een goed voorbeeld. Het hierna volgende voorbeeld is ontleend aan Brown (1963). Wij beschouwen een bepaald reserveonderdeel dat verbruikt wordt aan boord van marineschepen. Stel dat n schepen hun voorraad aanvullen door bestellen volgens een (B, Q) methode bij een depotschip. Neem aan, dat de afname per schip en per periode gekarakteriseerd mag worden door:

p = kans op afname van 1 produkt

$q = 1-p$ = kans op afname nul

De kans op afname van 2 of meer produkten op 1 schip binnen 1 periode is verwaarloosbaar klein. Als de schepen $Q = 1$ gebruiken, volgt de afname $\underline{x}$ uit het depotschip een binomiale verdeling met

$$E(\underline{x}) = p n$$

$$\sigma_1(\underline{x}) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}.$$

Indien echter de schepen een seriegrootte Q gaan hanteren, volgt het aantal orders een binomiaalverdeling met

$$p^1 = \frac{p}{Q}.$$

Hierin is

p' = per schip de kans dat in een periode een order (voor q stuks) naar het depotschip wordt gestuurd.

De verdeling van het aantal orders y aan het depotschip is een binomiaalverdeling met

$$E(y) = n \frac{p}{Q}$$

$$\sigma(y) = \sqrt{n \frac{p}{Q} (1 - \frac{p}{Q})}$$

(Merk op, dat per schip negatieve autocorrelatie optreedt; daarom geldt voor aaneensluitende perioden niet $\sigma_n = \sigma_1 \sqrt{n}$. Voorbeeld: als een schip in periode 1 heeft besteld, is de kans nul dat er in periode 2 door dat schip weer wordt besteld). Voor de frequentieverdeling van het aantal stuks x , per periode besteld bij het depotschip, geldt nu:

$$E(x) = n \frac{p}{Q} Q = np$$

$$\sigma_2(x) = q \cdot \sigma(y) = \sqrt{np(q - p)}.$$

Voor de "versterkingsfactor" $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ tengevolge van toepassing van de seriegrootte kunnen we dus stellen:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{\frac{Q - p}{1 - p}}$$

Een oplossing voor dit soort moeilijkheden moet voorname-lijk gezocht worden in de volgende richtingen:

- gebruik maken van informatie afkomstig van "stroomafwaarts" gelegen voorraadpunten
- periodieke systemen gebruiken
- gecorrigeerde rekenwijze voor de seriegrootte
- ander soort bestelsysteem dan de reeds beschouwde, bijv. overgaan op andere bestelregel totdat de voorraad in het depotschip beneden een bepaald punt is gekomen (zie o.a. Cran).

14. Berekenen en verlagen van voorraden.

De bedoeling is, in dit hoofdstuk enkele gedachtegangen aan te geven, die bij de berekening gevolgd kunnen worden alsmede enkele belangrijke wetmatigheden in de resultaten. Verder zal de vraag besproken worden, hoe wij dan de benodigde gegevens in de praktijk kunnen bepalen.

14.1. Bepaling B en Q bij een (B,Q) systeem, 1 voorraadpunt.

Ten aanzien van het kostenpatroon zijn vele veronderstellingen mogelijk, die elk min of meer overeenkomen met in werkelijkheid optredende situaties.

Wij maken hier de volgende veronderstellingen:

- een maal bestellen kost F, onafhankelijk van de hoeveelheid
- een bestelde serie komt in één keer in zijn geheel in het magazijn
- voorraadkosten bedragen I per stuk per jaar
- een keer buiten voorraad raken kost R, onafhankelijk van tijdsduur en omvang van de "stockout"; bij een voorraad onderdelen ten behoeve van montage is dit geen irreële veronderstelling
- verder zijn er geen beïnvloedbare kosten.

De notatie zal zijn:

t = levertijd

$\bar{d}$ = afname gedurende levertijd in aantal stuks

$\hat{d}$ = voorspelde afname tijdens de levertijd

k = een variabele, die de hoogte van het bestelniveau B bepaalt

Q = seriegrootte

σ_1 = standaarddeviatie van het verschil tussen voorspelde en werkelijke afname in 1 periode

σ_t = idem voor t periodes

D = verwachte afname per jaar in aantal stuks

Wij schrijven B als $B = \hat{d} + k\sigma_t$

en nemen aan, dat we daarvoor in de plaats mogen schrijven

$$B = \hat{d} + k\sigma_1 \sqrt{t}$$

(indien afname in opeenvolgende maanden onderling onafhankelijk)

- 164 -

Voer de benaming $\underline{x}$ in voor de genormaliseerde afwijking

$$\underline{x} = \frac{\underline{d} - \bar{d}}{\sigma_1 \sqrt{t}}$$

$\underline{x}$ heeft een kansdichtheid $f(\underline{x})$.

Wij raken tijdens de levertijd buiten voorraad indien

$$\underline{d} > \bar{d} + k \sigma_1 \sqrt{t}$$

$$\text{ofwel als } \frac{\underline{d} - \bar{d}}{\sigma_1 \sqrt{t}} > k$$

$$\text{d.i. als } \underline{x} > k$$

De jaarlijkse beïnvloedbare kosten kunnen bij benadering worden voorgesteld door:

$$C = \frac{D}{Q} F + \frac{Q}{2} I + k \sigma_1 \sqrt{t} I = \frac{D}{Q} R \int_k^\infty f(x) dx.$$

wat geschreven kan worden als

$$C = g(Q, k).$$

Partieel differentieren naar Q en k en nul stellen levert

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D \left\{ F + R \int_{k^*}^\infty f(x) dx \right\}}{I}}$$

$$f(k^*) = \frac{IQ \sigma_1 \sqrt{t}}{DR}.$$

In de meeste gevallen kunnen hiermee Q^* en k^* door iteratie worden gevonden; neen als eerste waarde voor Q de serie vlg. Camp. De grote moeilijkheid in de praktijk is, $f(x)$ te bepalen. Op de bepaling van D, F, I, R en ook $f(x)$ komen wij nog terug.

N.B. Let op de grote gelijkenis tussen de formule van Camp en de nu afgeleide formule voor Q^* ; voor zeer hoge R gaat $f(k^*)$ naar 0 en gaat Q^* over in $Q(\text{Camp})$.

- 155 -

14.2. Benaderde berekening voor Q.

Stelt men voor een bepaalde voorraadpost vast, dat het verwachte aantal stockouts per jaar niet meer mag bedragen dan bijv. 1, dan kan Q^* worden berekend uit

$$C = \frac{D}{Q} F + \frac{Q}{2} I + I \sqrt{t} k + R,$$

waarbij $\int_k^{\infty} f(x) dx = \frac{Q}{D}.$

Staat men een gegeven "stockout"-kans β toe per aanvullingsbestelling, dan vinden we

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(F + \beta R)}{I}}.$$

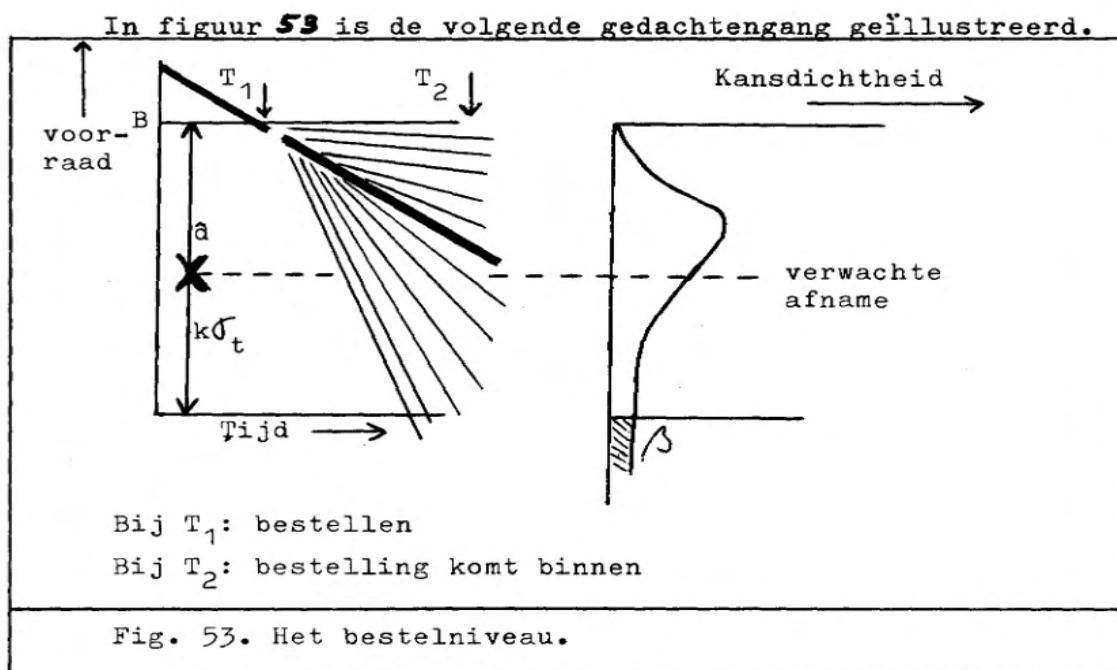
Indien βR te verwaarlozen is ten opzichte van F hebben we de formule van Camp weer terug. De waarde van β wordt gewoonlijk bepaald door na te gaan, hoe het verband is tussen β en de totale investering in voorraden. Veelal verdeelt men alle voorraadposten in enkele groepen; elke groep krijgt een eigen β waarde.

Op de formule voor de seriegrootte zijn correcties nodig in o.a. de volgende gevallen:

- de produktiesnelheid mag niet verwaarloosd worden t.o.v. de afnamesnelheid
- een klein aantal artikelen wordt gemaakt op één machine
- invloed van andere voorraadposten, parallel dan wel in serie
- seizoenpatroon in de afname
- grote kans op incourant worden bijv. door plotselinge wijziging van het ontwerp
- korting
- afronding op verpakkingseenheden, dagprodukties etc.
- het gereedschap, waarmee het produkt gemaakt wordt, heeft een beperkte en variabele standtijd
- de voorraad onderhanden werk in de werkplaats wordt beïnvloed door de keuze van Q .

14.3. Benaderde bepaling voor B in (B,Q) systeem.

In de praktijk gaat men veelal uit van een bepaald toelaatbare kans op buiten voorraad raken per aanvullingsbestelling.



$$B = \bar{a} + k \sigma_t$$

De veiligheidsvoorraad $k \sigma_t$ wordt bepaald door

$$\int_k^{\infty} f(x) dx = \beta$$

Anders gezegd: van de frequentieverdeling van $\bar{a} - \bar{a}$ willen we eerste, tweede en hogere momenten kennen. Verder moet $\bar{a}$ zelf bekend zijn. $\bar{a}$ wordt bepaald door een of andere voorspelmethode (zie 14.6.). De standaarddeviatie wordt bepaald bijv. m.b.v. de formule uit paragraaf 13.1 pag. 145 of m.b.v. het correlatieve verband besproken in paragraaf 13.1 mits de correlatie-coëff. hoog genoeg is, (pag. 146) of door het bijhouden van een schatting van σ per voorraadpost. Men kan daarna k rechtstreeks als waarde kiezen, in plaats van een bepaalde uitgangswaarde voor β te nemen ofwel men benadert de kansverdeling met een theoretische verdeling. (Merk op, dat in fig. 53 wordt verondersteld, dat de afname continu plaatsvindt, niet stootsgewijs. Daarom gaan we de levertijd in met een voorraad, die precies B bedraagt; dat is een benadering!).

De gammaverdeling blijkt soms een goede benadering te geven. Tabel is gebaseerd op aanpassing van een gamma-verdeling. In deze tabel wordt $a(\beta)$ getabelleerd, waarna B op een andere wijze bepaald wordt, nl. met de formule $B = a \bar{a}$.

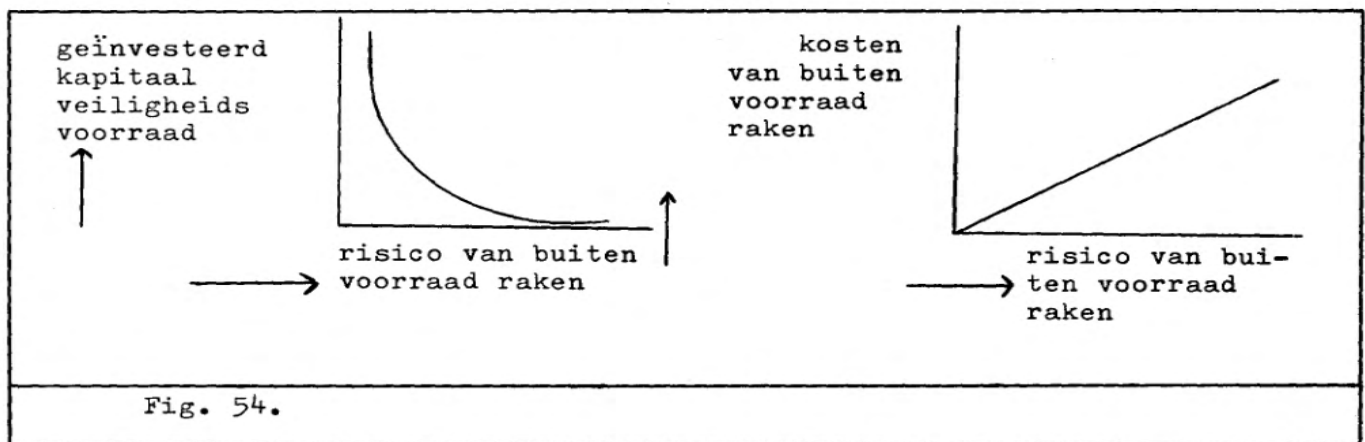
- 167 -

In de tabel slaan $\frac{\sigma_t}{\bar{d}}$ en β op de vraag gedurende de levertijd.

$\frac{\sigma_t}{\bar{d}}$	kans op buiten voorraad raken β per bestelling					
	10%	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
1.40	2.69	3.80	4.99	6.56	7.77	10.60
1.35	2.64	3.70	4.81	6.31	7.47	9.82
1.30	2.59	3.60	4.66	6.06	7.17	9.32
1.25	2.54	3.50	4.50	5.81	6.86	8.83
1.20	2.49	3.39	4.34	5.56	6.55	8.40
1.15	2.44	3.29	4.18	5.32	6.24	8.00
1.10	2.39	3.19	4.02	5.08	5.93	7.62
1.05	2.34	3.08	3.86	4.84	5.62	7.25
1.00	2.29	2.98	3.71	4.61	5.31	6.88
0.95	2.24	2.88	3.56	4.38	5.00	6.50
0.90	2.18	2.77	3.41	4.15	4.72	6.13
0.85	2.12	2.66	3.25	3.93	4.46	5.75
0.80	2.06	2.56	3.10	3.72	4.21	5.38
0.75	2.00	2.46	2.95	3.51	3.93	5.00
0.70	1.94	2.36	2.80	3.30	3.86	4.62
0.65	1.87	2.25	2.64	3.10	3.44	4.20
0.60	1.81	2.15	2.49	2.90	3.20	3.90
0.55	1.74	2.04	2.34	2.70	2.97	3.58
0.50	1.67	1.94	2.19	2.51	2.75	3.27
0.45	1.60	1.84	2.05	2.33	2.53	2.97
0.40	1.54	1.74	1.92	2.16	2.35	2.68
0.35	1.47	1.64	1.80	1.99	2.16	2.43
0.30	1.40	1.54	1.67	1.83	1.97	2.18
0.25	1.34	1.44	1.55	1.67	1.79	1.95
0.20	1.28	1.35	1.43	1.52	1.62	1.73
0.15	1.21	1.26	1.31	1.38	1.45	1.53
0.10	1.13	1.17	1.20	1.24	1.29	1.34
0.05	1.06	1.08	1.10	1.12	1.13	1.16

Over het kiezen van waarden k of voor β valt nog het volgende op te merken. Het buiten voorraad raken kunnen

we beschouwen als een tekortkoming in de service. Het verkleinen van de kans op buiten voorraad raken zien we dus als een toename van de service. We kunnen nu de gewenste service-graad *) bepalen door tegen elkaar af te wegen het benodigde te investeren kapitaal voor meer voorraad en de kosten die we hebben door het buiten voorraad raken (extra kosten door afdwingen versnelde levering of produktie, wellicht verliezen van een order, misschien zelfs verlies van een klant).



We kunnen, als een beslissing genomen is over de gewenste servicegraad, nu desgewenst "terugrekenen" naar de kosten per produkt dat we niet kunnen leveren, die eerder impliciet zijn aangenomen.

Om het bestelniveau te kunnen bepalen moeten we dus weten:

- 1) De frequentieverdeling van de verschillen tussen werkelijke en verwachte afname gedurende de levertijd.
 - 2) De frequentieverdeling van de levertijd zelf.
 - 3) Het toegestane risico van buiten voorraad raken (berekend of gekozen).
 - 4) De verwachte gemiddelde afname.
- *) Het begrip servicegraad op verschillende manieren worden gedefiniëerd, bijvoorbeeld:
- percentage van aantal gevallen, waarin een aanvullingsorder wel op tijd komt
 - percentage van alle klantenorders, waaraan uit voorraad voldaan wordt.

- 169 -

14.4. Gemeenschappelijke beperkingen.

In hoofdstuk 13 werd het bestaan van gemeenschappelijke beperkingen reeds genoemd. Toepassing van de Lagrange multipliers kan hierbij in principe als volgt geschieden. Stel: voor een aantal artikelen wordt de serie berekend met Camp. Uit de uitkomsten blijkt, dat gemiddeld genomen aan investering nodig zou zijn:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2} K_i$$

i = aanduiding van het artikel

n = aantal artikelen

K_i = inkoopprijs artikel i

Er is echter slechts een (kleiner) bedrag G beschikbaar.

Wij moeten dus minimaliseren *)

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} F + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} Q_i (rK_i)$$

(waarin r = normale rentepercentage /100) onder de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} Q_i K_i = G$$

Wij minimaliseren in plaats daarvan

$$C' = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} F + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2} (rK_i) + \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{Q_i K_i}{2} - G \right\} \lambda = C'(Q_i, \lambda).$$

en vinden

$$\frac{\partial C'}{\partial Q_i} = 0 \rightarrow Q_i^* = \sqrt{\frac{2D_i F}{(r + \lambda) K_i}}$$

$$\frac{\partial C'}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{F}{2} \left(\frac{\sum \sqrt{\frac{D_i}{K_i}}}{G} \right)^2 - r$$

N.B. λ speelt hier blijkbaar de rol van vereiste "extra rente".

Op overeenkomstige wijze kunnen uiteraard berekeningen worden uitgevoerd als andere beperkingen gelden.

*) ter vereenvoudiging zijn kosten van ruimte en risico verwaarloosd.

14.5. Bepaling kostengegevens.

In de praktijk is de bepaling van grootheden als F en I geen eenvoudige zaak. De gevraagde waarden zijn zelden uit de boekhouding zonder meer te vinden; deze is immers meestal opgezet met slechts kostprijsberekening als doel. Men herinnere zich echter:

"Different costs for different purposes" (Clark). De kernvraag is steeds: worden deze kosten beïnvloed door de keuze van Q resp. B etc. Ter illustratie het volgende. Een firma heeft de beschikking over twee magazijnen, M en N . M is geheel vol, N niet; de huurprijs is $f20,-$ per m^2 voor M en $f40,-$ per m^2 voor N . N is voor twee jaren gehuurd en voor de lege ruimte in N bestaat geen alternatieve aanwending. Welk bedrag aan ruimtekosten moet nu in de formule van Camp verwerkt worden?

Antwoord: ruimtekosten nul. De totale ruimtekosten worden niet beïnvloed door de keuze van Q . Dit wordt anders zodra magazijn N vol zou raken.

Indien we N op korte termijn per m^2 van derden huren, moet $f40,-$ per m^2 in rekening worden gebracht; dat zijn dan de marginale kosten.

F zijn de kosten, die eenmaal per serie optreden:

- uitschrijving bestelling
- bepalen omvang bestelling
- ontvangst en behandeling bestelbon
- ontvangst goederen in magazijn
- ontvangen factuur, verwerken factuur

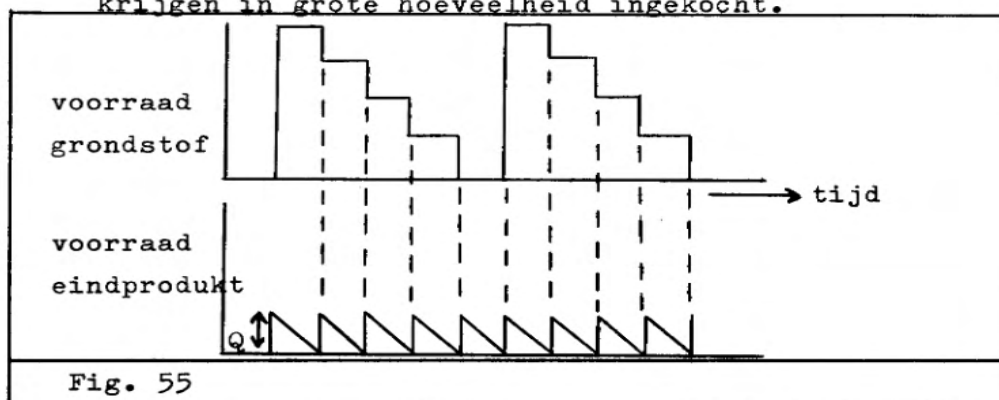
en in geval van een produktieserie bovendien:

- instelkosten machine
- omstelkosten bediende
- kosten van hernieuwd aanlopen (uitval, storing, tempoverlies)

Er zijn drie methoden denkbaar om de F te bepalen.

- a) De optelmethode. De kosten van alle genoemde punten worden bij elkaar opgeteld.
- b) Budgetvergelijking. Er worden twee budgetten gemaakt, één voor de fabriek zoals deze nu werkt en één voor de fabriek voor een denkbeeldige situatie, waarbij een extreem geval wordt genomen. Dit gebeurt bijv. voor één serie per produkt in 1 jaar. De gevonden kostendaling wordt nu toegerekend aan het bespaarde aantal omstellingen.
- c) Toepassing correlatierekening.
Afdelingen, die met verschillende aantallen omstellingen werken, worden onderling vergeleken. De correlatie is meestal gering omdat zoveel andere factoren ook een grote rol spelen.

Over de waarde, die voor K moet worden berekend, het volgende. In de voorraad is altijd één maal F gemiddeld half geïnvesteerd, onafhankelijk van Q . Dus K is de prijs per stuk, ontdaan van de instelkosten. Soms moet zelfs ook de materiaalprijs uit K geëlimineerd worden, n.l. als om andere reden het materiaal er toch al geweest was. Voorbeeld: Het uitgangsmateriaal wordt, om korting te krijgen in grote hoeveelheid ingekocht.



Het is duidelijk dat we nu voor de produktie-serie Q niet de prijs mogen rekenen die het benodigde uitgangsmateriaal voor Q gekost zou hebben, immers de Q van een volgende bewerking beïnvloedt de hoeveelheid materiaal niet die in voorraad is.

- 172 -

In twijfelgevallen moet men teruggaan naar een bestudering van de stroom van het geld. Hoe beïnvloeden de verschillende akties en beslissingen de inkomende en uitgaande stroom van liquide middelen? Er kan b.v. wel eens verschil zijn tussen het moment waarop bestelde goederen in de voorraad binnenkomen en het moment waarop de geldmiddelen ter betaling van die goederen uit de kas worden genomen.

Voor de vereiste nauwkeurigheid van de kostengegevens gelden beschouwingen als de volgende. Voor het Camp-model kan heel eenvoudig worden aangetoond dat gebruik van een serie $q = pq^*$ leidt tot beïnvloedbare jaarkosten

$$C = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) C^*$$

waarin q^* = optimale serie vlg Camp

C^* = beïnvloedbare jaarkosten voor $q = q^*$

Op grond van het voorgaande kan direct worden nagegaan hoe gevoelig C is voor b.v. een afwijking in de bepaling van F .

14.6. Voorspellen van de afname.

Zonder een voorspelling van de verwachte afname kunnen noch bestelniveaus noch seriegroottes bepaald worden. In dit college wordt over voorspellen niet gesproken. Wij volstaan met de opmerking, dat voorspellen op twee manieren mogelijk is (ook combinaties daarvan zijn denkbaar):

- extrapoleren van afnamecijfers (of andere cijfers, b.v.: het percentage van de totale omzet dat een bepaald artikel bereikt); hier vindt men technieken als MAT en evenredige correctie ("exponential smoothing");
- methodes, waarbij men meer informatie gebruikt, b.v.: "explosie" van een montageprogramma ter bepaling van onderdelenbehoefte of marktonderzoek ter bepaling van de verwachte vraag naar een eindprodukt.

14.7. Verlagen van voorraden.

Wij noemen hieronder alleen de punten, die gelden bij gebruik van (B, q) regels. In andere gevallen gelden soortgelijke overzichten.

Voorraad is som van veiligheidsvoorraad en seriegrootte-voorraad. Verlaging benodigde voorraad door:

- 1) Verhoging betrouwbaarheid levertijd
- 2) Verkorting levertijd
- 3) Verkleining aantal types (B en q zijn geen lineaire functies van D)
- 4) Verlaging omstelkosten
- 5) Juiste keuze machinepark (ook lettend op omstelkosten)
- 6) Bij gegeven machinepark: kies juiste produktiemethode
- 7) Verkleining fluctuatie afname
- 8) Verbetering afnamevoorspelling
- 9) Verkleining fluctuatie produktie
- 10) Goed communicatiesysteem ter vermijding van incurant.

14.8. Regels voor niveaubepaling.

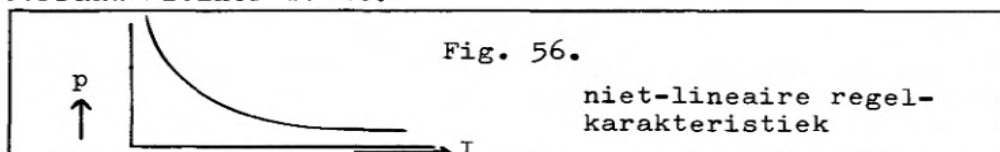
Voor berekening van de constante k in de regel van Magee onder stationaire afname: zie appendix J.

Tegen niet-stationaire vraag is deze regel minder bestand. Een "stap" in de afname leidt tot een blijvende afwijking van de gewenste voorraad. De rekentechnieken van de regeltechniek stellen ons in staat, het gedrag van deze en soortgelijke regels te analyseren.

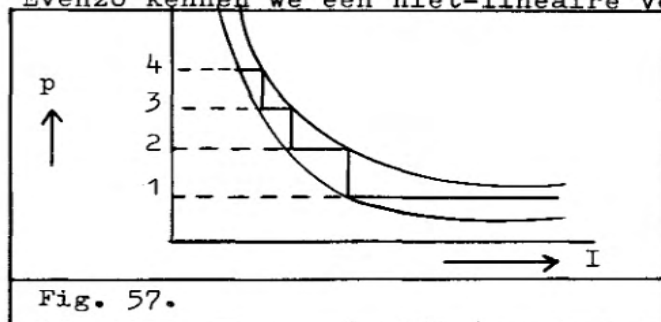
Ook is de beschreven lineaire regel minder geschikt voor de gewoonlijk optredende kostenstructuur. Een nadeel hierbij is, dat zowel bij een hoog als een laag voorraadniveau de produktie in dezelfde mate wordt bijgestuurd wanneer $I^* - I_{i-1}$ gelijk is. Deze situaties zijn echter niet gelijk als men spreekt over de voorraad van één produkt, omdat bij een laag voorraadniveau een geringe verdere daling plotseling grote kosten met zich mee kan brengen

als de voorraad kleiner wordt dan nul. Bij grote voorraad brengt een verdere stijging slechts evenredige kosten met zich mee. Daarom graag produktieregels welke bij een laag voorraadniveau de produktie sterker beïnvloeden dan bij een hoog voorraadniveau.

De niet-lineaire regelkarakteristiek laat zien hoe de hellingshoek van de karakteristiek verandert wanneer de voorraad kleiner wordt.



Evenzo kennen we een niet-lineaire veelstandenregeling (fig. 57)



14.9. Beïnvloeding van de totale voorraad door de bedrijfsleiding.

Tot slot van dit hoofdstuk enkele korte opmerkingen over de wijze, waarop de directie de totale voorraad zou kunnen beïnvloeden. Enkele bepalende grootheden zoals de gevraagde rentabiliteit van kapitaal geïnvesteerd in voorraden en de vereiste servicegraad kunnen van hogerhand worden vastgesteld. Dit gebeurt op grond van het verwachte verband tussen de genoemde grootheden enerzijds en b.v. de totaal benodigde hoeveelheid kapitaal voor voorraden anderzijds. Is de beslissing genomen, dan moet natuurlijk informatie worden terug gezonden over b.v.:

- in werkelijkheid geïnvesteerd kapitaal
 - totaal aantal omstellingen
 - totaal aantal "stockouts"
- zodat bijsturen mogelijk is.

- 175 -

14.10 Dynamische programmering bij voorraadproblemen.

Deze paragraaf bevat alleen verplichte stof voor Bdk-studenten. Wij verwijzen vrijwel geheel naar de verplichte literatuur. Het onderstaande dient alleen ter aanvulling.

Door Hadley en Whitin (1963) wordt dynamische programmering (DP) als volgt geïntroduceerd: "The natural formalism for setting up dynamic models in a form for numerical computations is DP".

DP is o.m. geschikt om problemen van het volgende type op te lossen:

bepaal niet-negatieve gehele getallen x_j zodanig dat $g(x_1, \dots, x_n)$ wordt geminimaliseerd. Daarin is

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

terwijl bovendien de beperking geldt:

$$\sum_{j=1}^n v_j x_j \leq V$$

v_j en V zijn gehele constanten.

Een eenvoudig voorbeeld van zo'n probleem is gegeven door Kaufmann en Faure (1963) : er kan maximaal 10 miljoen gulden worden geïnvesteerd in 4 projecten; alleen een investering per project van een geheel aantal miljoenen is toegestaan. De functies $f_1(x)$ etc. worden gegeven door de volgende tabel, die per project het verband geeft tussen investering en jaarlijkse winst. Vraag: welke toewijzing van de investering maximaliseert de totale jaarlijkse winst.

investering	winst bij investering in:			
	project 1	project 2	project 3	project 4
0 miljoen	0	0	0	0
1 "	0,28	0,25	0,15	0,20
2 "	0,45	0,41	0,25	0,33
3 "	0,65	0,55	0,40	0,42
4 "	0,78	0,65	0,50	0,48
5 "	0,90	0,75	0,62	0,53
6 "	1,02	0,80	0,73	0,56
7 "	1,13	0,85	0,82	0,58
8 "	1,23	0,88	0,90	0,60
9 "	1,32	0,90	0,96	0,60
10 "	1,38	0,90	1,00	0,60

- 176 -

Het zou ons hier te ver voeren, op de oplossing van het vraagstuk in te gaan.

In de verplichte literatuur wordt de oplossing van een voorraadprobleem met behulp van DP uitvoerig besproken.

Literatuuropgave voorraadproblemen.

Boeken

- | | | |
|---|------|----|
| 1. A. Battersby - "A guide to stock control" Pitman 1962.
Vertaald als Marka nr. 27. | C | |
| 2. R.G. Brown - "Decision rules for inventory management" Holt, Rinehart Winston 1967. | C, F | |
| 3. J. Buchan en E. Koenigsberg - "Scientific inventory management". Prentice-Hall 1963. | B, G | |
| 4. J.L. Burbidge - "The principles of production control" Mc. Donald & Evans London 1962. | B, D | |
| 5. W.C. Dalleck en R.B. Fetter - "Decision models for inventory management" Irwin 1961. | B | |
| 6. S. Eilon - "Elements of production planning and control" Mc Millan 1962. | D | |
| 7. S.E. Elmaghraby - "The design of production systems" Reinhold 1966. | E | |
| 8. G. Hadley en T.M. Whitin - "Analysis of inventory systems" Prentice-Hall 1963. | E, F | |
| 9. F. Hannsman - "Operations research in production planning and inventory control" Wiley 1962. | E | |
| 10. R.N. van Hees en W. Monhemius - "Productiebesturing en voorraadbeheer I" Centrex 1964. | C | xx |
| 11. C.C. Holt, F. Modigliani e.a. - "Planning production, inventories and work force" Prentice Hall 1960. | D | |
| 12. I.C.I. Monograph nr. 4, eindredactie A.J.H. Morrell, "Problems of stocks and storage" 1967. | C | x |
| 13. J.F. Magee - "Production planning and inventory control" Mc Graw Hill 1958, vertaald als Marka 72. | D | x |
| 14. J.F. Magee - "Physical distribution systems" Mc Graw Hill 1967. | C | |
| 15. J.F. Magee - " in druk | | |
| 16. J. Mélése - "La pratique de la recherche operationelle". | F, G | |
| 17. E. Naddor - "Inventory systems" Wiley 1966 | D | |

- 177a -

Enkele artikelen.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) R.L. Ackoff -"Production and inventory control in a chemical process" Operations Research Aug. 1955. | G | |
| 2) E.L. Arnoff e.a. -"An integrated process control system at the Cummins Engine Company" Operations Research July-Aug 1958. | G | |
| 3) H. Bosch -"Optimaal voorraadniveau van reserveonderdelen" Sigma 7 (1960) pag. 9 | G | |
| 4) A. Clark en H. Scarf -"Optimal policies for a multi-echelon inventory problem" Management Science July 1960. | E | |
| 5) J.A. Cran -"A two-level inventory control rule in a distribution system". 4 th Intern. Conf. on OR. Boston 1966, Session J. | D | |
| 6) H.F. Dickie -"Six steps to better control" Factory Aug. 1953. | C | |
| 7) M.A. Geisler -"A study of inventory theory" Man. Science p. 490. | E | x |
| 8) J. Goudriaan -"Statistische bepaling van de veiligheids-toeslag in het bestelniveau" T.E.D. 32 (1962) pag. 447. | B | |
| 9) J. Mèlèse -"L'aspect pratique de l'etude de la production d'une usine d'électrodes" Travail et Méthodes, Janv. 1960, p. 25. | G | |
| 10) J. Mèlèse en P. Elina -"La gestion par un système integre des approvisionnement d'une chaine de magasins" 4 ^e Intern. Conf. OR. Boston 1966, Session J. | G | |
| 11) A.R.W. Muyen -"De 20-80 regel verklaard" Doelmatig Bedrijfsbeheer 13 (1961) nr. 8. | C | |
| 12) T.L. Newberry -"A classification of inventory control theory" Journ. Ind. Eng. XI (1960) pag. 391. | B | |
| 13) K. Simpson -"A theory of allocation of stocks" Operations Research 7 (1959) nr. 6. | E | |

18. G. Prins - "Voorraadbeheersing" Stenfert Kroese 1966
19. H.E. Scarf e.a. - "Multistage inventory models and techniques" Stanford University Press 1963.
20. M.K. Starr en D.W. Miller - "Inventory control, theory and practice" Prentice-Hall 1962.

- 177 -

D	x
E	
B	x

- 178 -

15. Systeemsimulatie als methode van onderzoek en opleiding.

15.1. Wat is simulatie.

Met de term "simulatie" worden in de literatuur verschillende begrippen aangeduid.

C. West Churchman geeft een definitie van simulatie in algemene zin:

" "x simulates y" is true if and only if

- Ⓐ x and y are formal systems
- Ⓑ y is taken to be the real system
- Ⓒ x is taken to be an approximation to the real system
- Ⓓ the rules of validity in x are now - error - free".

Wij beperken ons hier tot problemen betreffende de bedrijfsvoering en bedoelen met simulatie: de stapsgewijze nabootsing van het werkelijk procesverloop, ofwel: experimenteren met een model van het bestudeerde systeem en wel door steekproeven te nemen uit de verzameling van mogelijke procesverlopen.

De simulatiemethoden zijn opgekomen omdat in veel gevallen de analytische methoden ons in de steek laten; soms zijn deze laatste ontoereikend, soms vragen zij voor praktische doeleinden in vergelijking tot de simulatiemethoden teveel tijd (hetzij manuren of computertijd, hetzij kalendertijd). Meestal kan langs de weg van simulatie dan toch inzicht worden verkregen in de werking van het systeem.

Simulatie geeft numerieke uitkomsten voor een numeriek gegeven situatie, maar verschaft geen dieper inzicht in de achtergrond van causale relaties. Zo kan b.v. voor de wachtsituatie, op pag. 110 aangeduid als 2, langs analytische weg worden gevonden:

$$\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} = \frac{r}{2(1-r)} (1 + C_{SV}^2)$$

Ook langs de weg van de simulatie kan men uitkomsten bepalen voor $\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})}$ en men kan een bepaalde verlangde nauwkeurigheid met

- 179 -

een gewenste betrouwbaarheid vaststellen door voldoende waarnemingen te verrichten voor verschillende waarden van de parameters r en C_{SV} . Men vindt als uitkomst echter geen formule, maar een tabel.

Ter verduidelijking is hieronder een voorbeeld gegeven van een zeer beperkte en eenvoudige simulatie: de nabootsing van het voorraadverloop voor één enkel voorraadpunt. Daarbij zijn de volgende regels in acht genomen:

- de voorraad wordt beheerst met behulp van een (s, Q) methode waarbij $s = 85$ en $Q = 160$
- aan het einde van elke week bestaat de mogelijkheid om te bestellen
- de levertijd is constant en bedraagt 3,1 weken
- de afnamecijfers zijn gegeven.

Aan het einde van elke periode wordt de boekhouding bijgewerkt en wordt beslist, of al dan niet besteld zal worden.

Tabel ... Voorbeeld van een simulatie				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
week nr.	begin voorraad	afname	eindvoorraad	besteld aan einde van de week
1	150	30	120	-
2	120	40	80	160
3	80	10	70	-
4	70	40	30	-
5	30	20	10	-
6	10	30	140	-
7	140	50	90	-
8	90	20	70	160
9	70	40	30	-
10	30	40	-10	-

Het is duidelijk, dat desgewenst een dergelijke simulatie bijzonder goed geschikt is om door een computer te worden uitgevoerd.

15.2. Hoe komt men aan de invoergegevens?

Er bestaan in hoofdzaak twee manieren om bij een simulatie als de bovenstaande de afnamegegevens te creëren:

15.2.1. Men neemt eenvoudig de afnamecijfers uit het verleden en voert deze achtereenvolgens toe aan de simulatieberekening.

Een voordeel is, dat de werkelijke cijferreeks niet eerst door een wiskundig model wordt vervangen met alle gevaren vanden. Een voordeel is ook, dat de mensen uit het betrokken bedrijf (die hun beslissing mede baseren op de resultaten van de simulatieberekening) de getallenreeks eerder als "werkelijkheid" zullen (denken te) herkennen. Het grote nadeel is echter, dat op deze wijze gewoonlijk veel te weinig getallen ter beschikking staan, indien van de simulatie een nauwkeurige uitkomst wordt verlangd.

15.2.2. Door middel van een lotingsproces genereert men een reeks afnamecijfers die, naar valt aan te nemen, ook aan de werkelijkheid zou hebben kunnen ontspruiten. Men neemt dus een steekproef uit de stochastische processen, die zouden kunnen optreden. Het afnamecijfer, dat in de simulatieberekening voor dag (of week) nummer i wordt gebruikt is een trekking uit de kansverdeling voor de afname op dag (resp. week) nummer i .

Hoe wordt nu een dergelijke trekking verkregen?

Eerst zal worden nagegaan, hoe een door het toeval bepaalde trekking kan worden verkregen uit een rechthoekige verdeling tussen 0 en 1. Met behulp van dit "aselecte getal" ("random number") kunnen desgewenst weer trekkingen worden gedaan uit andere frekwentieverdelingen. Als mogelijkheden voor het genereren van trekkingen uit een rechthoekige verdeling kunnen worden genoemd:

- een roulette
- de door Hamaker bedachte tienzijdige dobbelsteen
- een tabel met aselechte getallen (in veel handboeken voor statistiek of operationele research te vinden.) Veelal zijn deze getallen verkregen langs de hieronder besproken methode van de "pseudo-random numbers".
- de methode van de "pseudo-random numbers" (pseudo-aselechte getallen).

Voor een computer is verreweg de snelste methode: intern in de computer genereren van pseudo-aselechte getallen volgens een bepaalde rekenregel. Indien men een goede rekenregel gebruikt, zijn deze getallenreeksen voor elk praktisch gebruik niet te onderscheiden van echte aselechte getallen; voordelen van het gebruik van deze methode zijn:

- snelheid (er is niet voor elk getal opnieuw inleestijd nodig)
- er is weinig geheugenruimte nodig (geen tabel!)
- reproduceerbaarheid. Hetzelfde aanvangsgetal (eventueel: dezelfde set aanvangsgetallen) levert telkens precies dezelfde reeks pseudo aselechte getallen.

Er zijn diverse methodes om pseudo aselechte getallen te genereren. De eigenschappen van de verschillende reeksen zijn diepgaand bestudeerd (zie b.v. het proefschrift van Duparc 1952). De meeste rekencentra beschikken over subroutines om ze te genereren. Om de gedachten te bepalen kan de "multiplicatieve congruentiemethode" van Lehmer (1951) als voorbeeld dienen van een reken-schema dat volgens vaste rekenregels schijnbaar aselechte getallen produceert. Heeft men eenmaal het getal R_n , dan ontstaat hieruit R_{n+1} volgens de regel:

$$R_{n+1} = K R_n \pmod{m} \quad *)$$

In deze opzet zijn R , K en m gehele getallen. Om een getal tussen 0 en 1 te krijgen moet dus gedeeld worden door m . Een goede keuze is $K = 7^k$, k oneven; verder $m = 10^r$ bij een decimale machine. Dus bijvoorbeeld: $k = 11$, $m = 10^{10}$, $R_0 = 9430000001$.

Het rekenschema kan dan aldus worden weergegeven:

- *) $x \pmod{y}$ is het getal dat als rest overblijft bij deling van x door y .

- 182 -

```

      x x x x x x x x x x      Rn
vermenigvuldigen  x x x x x x x x x x      K
      x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x
                  laatste 10 cijfers
                  ←—————→
                  Rn+1

```

Als men eenmaal beschikt over een methode, om een trekking uit een rechthoekige verdeling te genereren, is een trekking uit een willekeurige verdeling mogelijk geworden. Denk immers deze laatste verdeling opgebouwd uit een groot aantal blokjes, b.v. 10.000; de blokjes zijn in volgorde van het nummer opgestapeld (zie figuur)

Wanneer men nu aselechte getallen R_n gaat trekken uit een rechthoekige verdeling tussen b.v. 0000 en 9999 (de grenzen inbegrepen) dan correspondeert elk getal, via het blokje met dat getal als nummer, met een klasse van de frequentieverdeling.

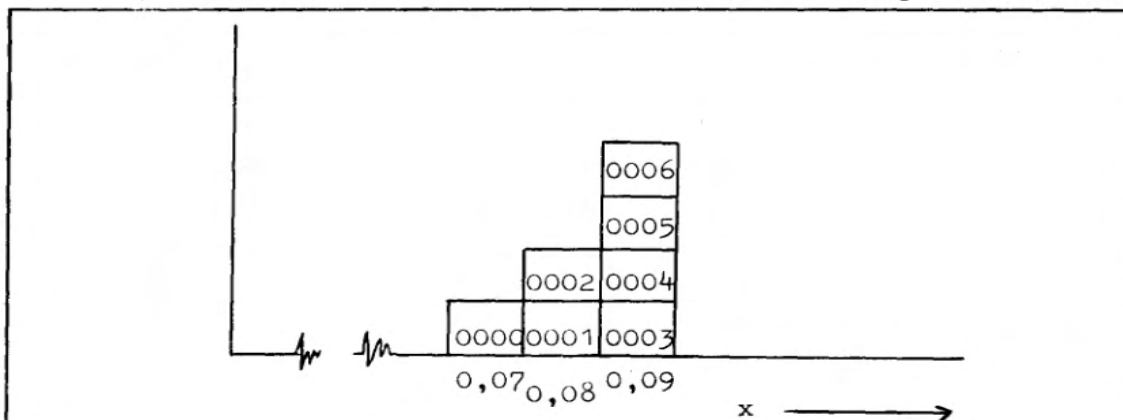


fig. 58.

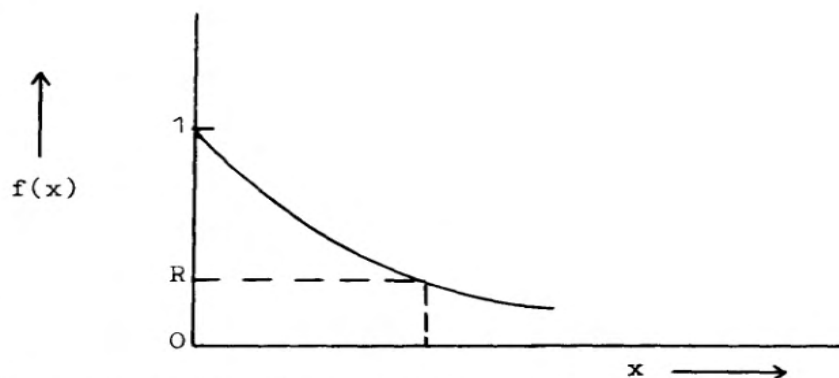


fig. 59. Transformatie van R in x.

- 183 -

Uiteraard kan men de klassebreedte net zo klein kiezen als gewenst lijkt.

Een uitvoeringsmogelijkheid zou nu kunnen zijn, in het computerprogramma een vertaaltabel op te nemen, die er als volgt uitziet:

R	bijbehorend klassemidden
0000	0,07
0001,0002	0,08
0003 t/m 0006	0,09
0007 t/m 0014	0,10
etc.	

Voor een empirische verdeling kan deze methode altijd gebruikt worden. Via een cumulatieve verdeling kan men als limietgeval van het voorgaande langs grafische weg elk punt R van de verticale as (waarbij dan $0 \leq R \leq 1$) transformeren in een punt x van de horizontale as. Indien de frequentieverdeling in analytische vorm gegeven is, kan deze methode soms ook voor de computer worden geprogrammeerd. Als voorbeeld daarvan wordt nu de trekking uit een negatief exponentiële verdeling behandeld.

Een trekking uit een negatief exponentiële verdeling kan als volgt plaats vinden. Stel dat men reeds beschikt over telkens een trekking R uit een rechthoekige verdeling tussen 0,0000 en 0,9999. Men wenst nu telkens R om te zetten in een aselechte trekking x uit een negatief exponentiële verdeling met $E(x) = 1$ (zie figuur).

R is een toevallige trekking uit de genoemde rechthoekige verdeling, dus (bij benadering) : $P[R < R] = R$

Men wenst dat

$$P[x > x] = P[R < R] \text{ voor elke } R$$

dus, omdat x uit een neg. exp. verdeling komt:

$$e^{-x} = R$$

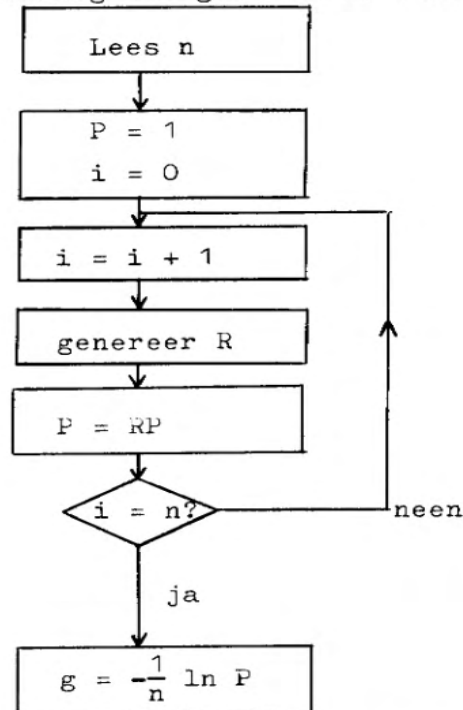
en dientengevolge $x = -\ln R$

Een trekking uit een negatief exponentiële verdeling met $E(x) = C$ kan dus gegenereerd worden volgens

$$x = -C \ln R$$

- 184 -

Blokschema voor het genereren van een toevallige trekking uit een gammaverdeling met gemiddelde 1 en n vrijheidsgraden.



Het berekenen van $\ln R$ duurt vrij lang; de methode van Von Neumann*) is echter trager. De besproken methode is tevens geschikt als uitgangspunt voor trekkingen uit een gammaverdeling.

Een trekking uit een gammaverdeling met n vrijheidsgraden kan als volgt worden verkregen. Noem deze trekking g; g is de som van n trekkingen uit een negatief exponentiële verdeling. Indien men een trekking wenst uit een gammaverdeling met $E(g) = 1$, dan kan g worden samengesteld als:

$$g = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

waarbij x_1, x_2 etc. opeenvolgende trekkingen zijn uit een negatief exponentiële verdeling met $E(x) = 1$, dus

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{n} (-\ln R_1 - \ln R_2 - \dots - \ln R_n) = \\ &= -\frac{1}{n} \ln R_1 R_2 \dots R_n \end{aligned}$$

Om het computerprogramma zo flexibel mogelijk te houden, moet het zo geschreven worden, dat n een variabele is, die ingelezen moet worden (zie blokschema).

*) zie Naylor e.a. pag. 83.

- 185 -

Het bovenstaande moge dienen om een eerste indruk te geven, hoe pseudo-aselecte trekkingen kunnen worden gegenereerd.

Voordelen van het gebruik van pseudo-aselecte getallen (in plaats van cijferreeksen uit het verleden) zijn:

- er kan op deze wijze een reeks afnamecijfers worden gegenereerd, die veel langer is dan de historische reeks
- een dergelijk proces is voor een computer veel efficiënter dan het inlezen van een gegeven reeks getallen.

Nadelen zijn:

- het gevaar bestaat, dat het gebruikte kansmodel de werkelijkheid onvoldoende weergeeft. Men moet bijvoorbeeld speciaal bedacht zijn op de aanwezigheid in de werkelijke getallenreeksen van trend, seizoen, autocorrelatie en sprongen in het niveau. Indien men dergelijke effecten heeft onderkend, kunnen zij natuurlijk worden opgenomen in de simulatie.
- de mensen uit het betrokken bedrijf zullen de gegenereerde getallenreeks wellicht minder gauw als "echt" ervaren.

15.3. Overzicht van de toepassingsmogelijkheden.

De simulatiemethode kan worden toegepast als rekenmethode bij onderzoek. Indien in bepaalde situaties bijvoorbeeld de analytische methoden ontbreken voor het berekenen van de optimale combinatie van waarden voor s en Q , dan kan door middel van simulatie dit optimum worden vastgesteld.

Als onderzoek kan ook worden aangemerkt: het gebruik van simulatie in de fase "toetsing" van een opdracht; daarbij wordt dan getoetst of een tevoren gevonden oplossing inderdaad voldoet. Men kan de simulatiemethode echter ook gebruiken als opleidingstechniek. Elke afzonderlijke beslissing wordt dan niet genomen door een computer, maar door een mens die al dan niet volgens vaste regels werkt. Men spreekt in dit geval van een voorraadspel of bestel-spel; de hier bedoelde spelen vormen een speciale categorie van de bedrijfsspelen.

Hoe men de spelen, die gebruikt worden bij de opleiding, uitvoert hangt af van de vraag of men te maken heeft met een algemene opleiding (een algemene planningcursus bijv.) dan wel

een gerichte training, die deel uitmaakt van het invoeringsprogramma van een bepaald bestelsysteem in een bepaald bedrijf.

15.4. Simulatie als rekenmethode.

Men kan de simulatie beschouwen als een experiment met de nagebootste werkelijkheid. Voor deze toepassing zal vrijwel altijd een computer worden ingeschakeld; de afnamecijfers worden als regel gegenereerd volgens een lotingsproces.

Voorbeeld.

Een redelijke methode om voor een gegeven situatie een optimaal bestelsysteem te bepalen is te zien in fig. Daarna zal worden nagegaan, hoe een dergelijke simulatie nog kan worden verfijnd. Gegeven is: de afname mag worden beschouwd als opeenvolgende onafhankelijke trekkingen uit een gegeven kansverdeling. De levertijd bedraagt 2,1 weken. Men moet minimaliseren de som van:

- de voorraadkosten, die steeds bepaald worden door de voorraad aan het einde van de week

- de bestelkosten
- de stockoutkosten, die bepaald worden door het aantal weken, waarin men eindigt met een tekort.

Voor het gebied, waarbinnen de optimale combinatie van s en q kan worden verwacht, worden nu systematisch voor een aantal combinaties van s en q de verwachte kosten bepaald door een groot aantal perioden te simuleren. Voor elke combinatie wordt dezelfde reeks toevalscijfers gebruikt, doordat men iedere run met dezelfde R_0 begint. Het resultaat van de simulatieberekening is voor elke combinatie van s en q :

- het aantal weken buiten voorraad
- het aantal bestellingen
- de gemiddelde voorraad.

Voor elke gegeven combinatie van kostencijfers kan nu de optimale combinatie van s en q worden berekend. Men kan ook deze berekening natuurlijk door de computer zelf laten uitvoeren.

BLOKSCHEMA SIMULATIE

- 187 -

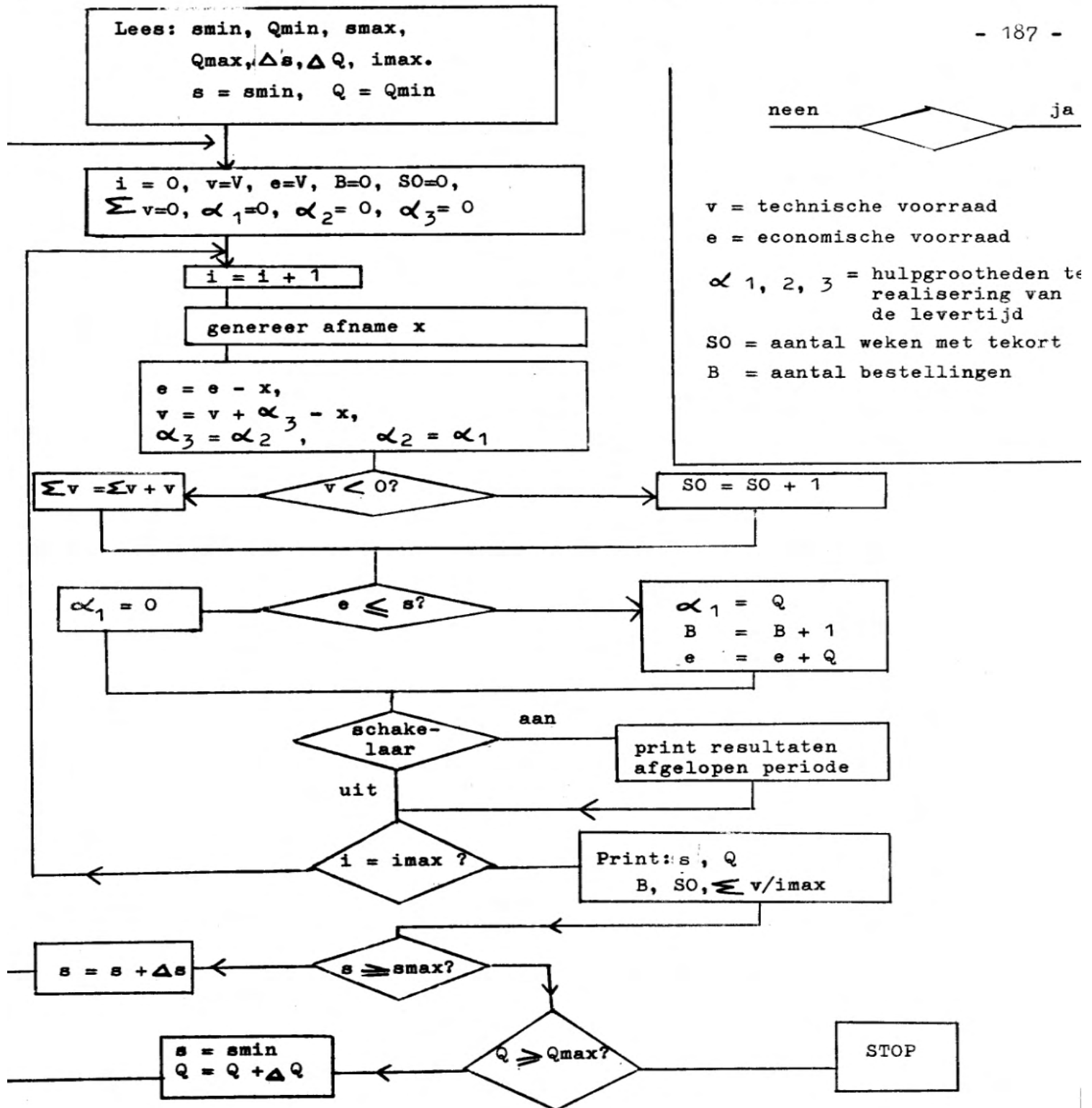


fig. 60.

Algemene richtlijnen.

Probeer het programma altijd zo flexibel mogelijk te houden. Daarom zijn grootheden als s_{min} , Δs , i_{max} etc. niet als constanten in het programma opgenomen; zij kunnen voor elke berekening als variabelen worden ingelezen. Men kan natuurlijk nog enkele stappen verder gaan en bijvoorbeeld ook de vorm van de frequentieverdeling en de lengte van de levertijd als variabelen laten inlezen.

Door de schakelaar om te zetten kan men de resultaten ook stap voor stap door het programma laten uitprinten. Dat kost veel tijd en zal gewoonlijk niet gebeuren; het is echter goed, deze mogelijkheid te hebben voor het testen van het programma en om aan anderen te laten zien, wat het programma precies doet.

Een apart probleem is de betrouwbaarheid van het simulatie-resultaat. In het bijgaand blokschema is aan dat punt geen aandacht geschonken. Meestal is dat wel vereist, omdat de betrouwbaarheid van het resultaat alleen door de simulatie zelf bepaald kan worden. De beste methode daartoe is, voor elke combinatie van s en Q niet alleen de einduitkomst te laten geven, maar ook tussenuitkomsten over bijvoorbeeld periodes ter lengte van $1/30$ maal de totale periode. Uit de spreiding van die tussenresultaten kan men een indruk krijgen van de betrouwbaarheid van het eindresultaat. In de praktijk maakt men vaak de fout, de betrouwbaarheid te overschatten en niet expliciet een betrouwbaarheidsinterval te bepalen.

Bij een simulatie moet steeds worden nagegaan, in hoeverre het mogelijk is, de hoeveelheid te verrichten berekeningen te verminderen. (Op zichzelf ligt hier weer een optimum probleem: de tijd van de mens zou moeten worden afgewogen tegen de tijdsbesparing op de computer). Op dit gebied verdient een aantal punten vermelding:

- a) De meest primitieve uitvoering van een simulatie is: boots alles na, laat alle resultaten uittypen. Een grote verbetering ten opzichte daarvan is het, in de simulatie alleen die karakteristieken van het probleem op te nemen, die wezenlijk zijn in verband met de probleemstelling. Houdt de "output" beperkt tot enkele kenmerkende grootheden, die de gehele

- 189 -

werking van het bestudeerde systeem vastleggen.

- b) Probeer een analytische benadering te vinden en toets met de simulatie methode de kwaliteit van die benadering; bepaal eventueel een correctiefactor, die op de analytische oplossing kan worden toegepast.
- c) Het gegeven blokschema geeft opdracht, voor elke waarde van s opnieuw een simulatie uit te voeren. Het is echter voldoende, een simulatie uit te voeren voor één waarde van s ; als uitkomst moet dan echter ook worden geleverd:
- de frequentieverdeling van de voorraad op het moment van bestellen;
 - de frequentieverdeling van de voorraad op het moment van binnenkomen van de bestelling.
- Deze resultaten geven ook informatie voor andere waarden van s , men hoeft immers slechts de ligging van de nullijn te verschuiven (zie figuur).
- d) Probeer het probleem zo ver mogelijk analytisch op te lossen en ga pas vanaf dat punt simuleren. Zo sprak Haitzma (1959) een voorraadprobleem waarbij gegeven was:
- de voorraad wordt beheerst met een (B, Q) systeem; Q is gegeven;
 - de levertijd L volgt een gamma-verdeling met $n = 4$;
 - het aantal klantenorders per periode volgt een Poissonverdeling, de ordergrootte in aantal stuks is gammaverdeeld met $n = 2$;
 - de voorraadkosten bedragen C_1 per dag per ton in voorraad;
 - de achterstandskosten bedragen C_2 per dag per ton achterstand.

Gevraagd wordt: Wat is de optimale waarde voor B ?

N.B.: als de bestelling geplaatst wordt, is de uitgangsvoorraad in het algemeen niet B , maar lager dan B , omdat de afname niet continu plaatsvindt.

Haitzma toont nu eerst aan, dat geldt:

$$\frac{1}{Q} \int_{B^*}^{B^*+Q} F(x) dx = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

- 190 -

Hierin is

B^* = optimale B

$F(x)$ = cumulatieve verdelingsfunctie van $\underline{x}$

$\underline{x}$ = de vraag tijdens de levertijd

Indien $F(x)$ bekend zou zijn, zou uit deze vgl B^* kunnen worden berekend.

Echter $F(x)$ is niet bekend; deze moet bepaald worden.

Indien de levertijd L een constante zou zijn, zou het aantal klanten y per levertijd worden gegeven door

$$P(y/L) = P(\underline{y} = y)$$

waarbij $\underline{y}$ Poissonverdeeld is en $E(\underline{y}) = L \cdot \lambda$

Indien L zelf een stochastische variabele is, geldt:

$$P(y) = \int_0^{\infty} P(y/L) F(L) dL.$$

Er kan worden aangetoond, dat dit een negatief binomiale verdeling is. Men kan nu $F(x)$ bepalen, door vele malen de volgende berekening uit te voeren:

- genereer een trekking uit de betrokken negatief binomiale verdeling; dit levert het getal y (aantal orders)
 - genereer y keren een trekking uit een gammaverdeling met $n = 2$.
- e) Indien de vorm van de kostenfunctie enigszins bekend is, kan soms een computerprogramma worden geschreven, dat zelf het optimum zoekt. Om toch een gevoeligheidsanalyse mogelijk te maken, kan men daarna een aantal punten in de buurt van het optimum laten doorrekenen.
- f) Er wordt gewerkt aan een aantal statistische "variance reducing techniques" waarbij men er naar streeft, een bepaalde betrouwbaarheid van het resultaat met minder waarnemingen te bereiken. Wij noemen hier slechts de namen als verwijzing naar de literatuur voor evt. verdere studie:
- stratified sampling
 - gebruiken van reproduceerbare reeks aselechte getallen (fixed sequence sampling)
 - importance sampling

- 191 -

- control variate method
- antithetic variate method

Een algemene aanbeveling is, om enkele simulatiestappen zelf met de hand uit te voeren volgens het computerprogramma. Dit is niet alleen nuttig om het programma te testen, maar ook om zelf enig gevoel te krijgen voor het gesimuleerde verschijnsel.

Zoals bij alle experimenten is het natuurlijk ook hier geboden, een verstandige reeks experimenten op te zetten, eventueel met behulp van de statistische theorie van proefopzetten.

Twee systemen voor bijhouden van de tijd.

Daar men steeds het verloop van een proces in de tijd simuleert, moet in een register de gesimuleerde tijd worden bijgehouden.

Daartoe bestaan twee methoden:

- "synchronous timing"; het register wordt steeds met eenzelfde tijdeenheid opgehoogd; na elke keer ophogen wordt nagegaan, welke gebeurtenissen in het afgelopen interval hebben plaats gevonden; de bijbehorende toestandsveranderingen worden aangebracht;
- "asynchronous timing"; iedere keer wordt nagegaan, wat de eerstvolgende gebeurtenis is; het tijdregister wordt opgehoogd tot de tijd van die gebeurtenis; die gebeurtenis wordt verwerkt; etc.

Het gebruik van simulatietaalen.

Er bestaat een aantal "simulatietaalen", waarin men computerprogramma's voor simulaties kan schrijven; b.v.: SIMULA, SIMSCRIPT, GPSS.

Een andere mogelijkheid is echter, dat men de programma's normaal in ALGOL schrijft en een aantal subroutines in "procedures" vastlegt.

Het gebruik van een simulatietaal heeft als voordeel:

- (iets meer) tijdwinst bij het programmeren;
- de noodzaak, het probleem sterk te structureren.

- 192 -

Nadelen zijn:

- soms sterke beperkingen wat betreft de mogelijke output en soms ook wat betreft de te beschrijven voorschriften voor toestandsveranderingen;
- het aanleren van een nieuwe programmeertaal;
- minder efficiënt computergebruik, daardoor langere rekentijden.

Voorbeelden van toepassingen.

Enkele voorbeelden van de vele toepassingen zijn:

- simulatie van de kringloop van motoren en reservemotoren bij een luchtvaartmaatschappij;
- simulatie van verkeersstromen over een kruispunt met stoplichten;
- simulatie van het onderhoudswerk aan staalovens;
- simulatie van systemen van voorraadbeheersing en distributie;
- simulatie van militaire conflicten op grote schaal;
- simulatie van waterstromen en -niveaus in een rivier met stuwdammen;
- simulatie van de loop van orders door een machinefabriek.

- 193 -

Literatuur over simulatiemethoden.

1. R.L. Ackoff e.a. - "Introduction to operations research" Wiley 1957 pag. 174.	B	
2. S. Elmaghraby - "The design of production systems" Reinhold 1966, pag. 415 e.v.	B, D	
3. A.H. Haitzma - Rapport S 246 van het Mathematisch Centrum te Amsterdam.	E	
4. J.M. Hammersley en D.C. Handscomb - "Monte Carlo methods" Methuen, Londen 1964.	E	
5. J. Harling - "Simulation techniques in operations research - a review". Operations Research, vol 6 (1958) p. 307.	B	
6. F.S. Hillier en G.J. Lieberman - "Introduction to operations research" Holden - Day 1967, chapter 14.		x
7. A. Kaufman en R. Cruon - "Les phénomènes d'attente", Dunod 1961, chapitre 10.	B	x
8. H.J.M. Lombaers - "Talen voor simulatie met digitale rekenmachines" Informatie 10, 3, p 52-54.		
9. W. Monhemius - "Le problème des temps d'attente dans l'étude du travail". L'étude du travail nov. 1964, pag. 9.	C	
10. T.H. Naylor, J.L. Balintfy, D.S. Burdick en Kong Chu - "Computer simulation techniques" Wiley 1966;	E, F	
11. G. Prins - "Voorraadbeheersing". Stenfert Kroese 1966.	B	
12. K.D. Tocher - "The art of simulation" Londen 1963.	D, F	
13. L. Kosten - "Simulatie in het algemeen" Informatie 10, 3, p 55-60.		

16. Industriële dynamica.

Reeds in 1932 schreven Goudriaan en Cahen: " --- it is of great importance both from the standpoint of business and of social economics, that stocks should be kept as small as possible, the reasons herefore being as follows: (---) 4) in times of crisis an industry with small stocks of finished product needs not curtail its production to such an extent as one with large stocks; during booms it need not carry out such great extensions of its plant". Het bedoelde verschijnsel en soortgelijke effecten werden door Forrester meer systematisch bestudeerd ("Industrial dynamics").

Forrester beschouwt een industriële organisatie als een "complex interlocking network of information channels". De managers worden daarbij door hem beschouwd als punten, waar informatie ingaat en waar beslissingen uitkomen. Zijn studie werd geïnspireerd door zijn vermoeden dat veel oscillatieverschijnselen in het bedrijf, geweten aan externe invloeden, in feite intern worden versterkt of zelfs veroorzaakt. Hij wil ID zien als een methode van systeemanalyse en systeemontwerp voor de bedrijfsleiding. Onderwerp: de met de tijd variërende interacties tussen de delen van een systeem. Doel: laten zien hoe structuur, versterking en vertraging het gedrag van het systeem bepalen.

Forrester beschrijft een systeem als een stelsel van:

- stromen
- reservoirs
- beslissingsregels

De stromen (informatie, materialen, geld, arbeid, kapitaal-goederen) worden beschouwd als totalen (de afname van alle produkten samen, bijv.) en als continu. De stroomsterkte op een bepaald moment kan niet worden gemeten,

- 195-

wel de doorgestroomde hoeveelheid gedurende een bepaalde periode.

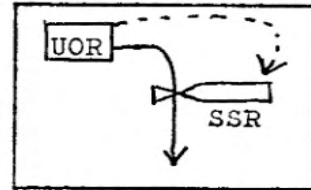
Reservoirs zijn bijv. de hoeveelheid geld in een bepaalde kas, de voorraadhoogte in een bepaald magazijn en de hoeveelheid personeel in dienst van het bedrijf.

Twee soorten beslissingsregels komen voor:

- wetten van het systeem, te beschouwen als een soort natuurwetten.

Voorbeeld: (ontleend aan Forrester)

$$SSR.KL = \frac{UOR.K}{DFR.K}$$



SSR.KL = "shipment sent by retailers during period KL"

UOR.K = "unfilled orders at retailers at time K"

DFR.K = een constante. ^{tevens}

(deze formule levert een voorbeeld van een vertraging)

- beslissingen, gewoonlijk op basis van terugkoppeling.

Voorbeeld:

$$PDR.KL = RRR.JK + \frac{1}{DIR} \left\{ (IDR + LDR + UOR)K - (IAR + LAR + UNR)K \right\}$$

PDR = purchasing decision rate at retailers

DIR = constante

{ -- } = (gewenste - werkelijke) economische voorraad

RRR = requisitions received at retailers.

Forrester's aanpak is nu de volgende:

- 1) maak model van beslissingsregels voor elk belangrijk beslissingscentrum
- 2) simuleer met digitale computer hele beslissingssysteem periode voor periode om karakteristieken te vinden
- 3) toets het model
- 4) ga effecten van voorgestelde verbeteringen na door gesimuleerde experimenten op de computer
- 5) voer verbeterde structuur en/of beslissingsregels in.

De berekeningen verlopen stap voor stap.

Indien alle niveau's ten tijde J bekend zijn, kunnen alle stromen gedurende JK worden bepaald. Daaruit worden de nieuwe niveau's ten tijde K berekend etc.etc...

- 196 -

Een van de gevallen, die Forrester bestudeerd heeft, zullen we hier iets nader beschouwen als voorbeeld. Een bestelketen bestaat uit detaillisten, grossiers, fabrieksmagazijn, fabriek. Over vertragingen en beslissingsregels zijn bepaalde veronderstellingen gemaakt. Stel dat op zeker moment de vraag van de consumenten met 10% toeneemt. Dit betekent dat de detaillist of geheel of bijna door zijn veiligheidsvoorraad raakt. Hij zal dus meer bestellen bij de grossier. Niet alleen echter een surplus ter wederaanvulling, doch ook een extra hoeveelheid om zijn veiligheidsvoorraad groter te maken. De grossier ontvangt dus bestellingen, die, omdat ze van meerdere detaillisten komen, ook zijn veiligheidsvoorraad flink aantasten. Als de levertijd fabriek-grossier langer is dan die van grossier-detaillist, dat heeft de grossier zonder meer al een grotere veiligheidsvoorraad, die hij nu echter ook moet gaan verhogen met het oog op de door hem verwachte toekomstige vraag.

Dit effect zet zich door de keten voort, en het kan gebeuren dat de fabriek orders krijgt die 30% boven de aanvankelijke vraag liggen. Zal de fabriek genoeg capaciteit hebben om deze orders te leveren? Of moet de fabriek plotseling de capaciteit opvoeren? Als nu de vraag na enige tijd weer daalt, dan krijgen we het omgekeerde effect. Iedereen gaat de verhoogde veiligheidsvoorraad afbreken, en bestelt weinig bij. De fabriek zal dan zeer kleine orders krijgen, en een groot gedeelte van de capaciteit staat leeg. Het kan nu gebeuren dat iedereen in de keten zelfs lagere veiligheidsvoorraden heeft dan vóór de verhoogde vraag. De eerstvolgende keer zullen ze dus weer meer bestellen. Zo is de cyclus rond en het hele systeem in oscillatie.

Als remedies worden voor het behandelde voorbeeld gevonden:

- 1) De snelheid waarmee men zijn veiligheidsvoorraad wil aanpassen. Het zal duidelijk zijn, dat er een middenweg gevonden moet worden tussen:

- 197 -

- a) Snel reageren, snel de voorraad aanpassen aan de gewijzigde vraag maar tegelijkertijd een opslingering veroorzaken (onbewust).
- b) Langzaam reageren, aanvankelijk de voorraad niet aanpassen aan de gewijzigde vraag, veel risico om buiten voorraad te raken maar ook geen opslingering.

Dit noemt men de mate van demping.

- 2) Men kan er naar streven, een zo laag mogelijk totale voorraad bij de distributiepunten van de tweede en eerste orde (detaillisten en grossiers) aan te leggen. Hoe groter de voorraad des te groter het opslingerend effect in een dynamische situatie.

De volgende maatregelen kunnen leiden tot verlaging van de totale voorraad in de distributiepunten van eerste en tweede orde::

- a) Zo groot mogelijke beperking van het aantal parallelle distributie-punten van dezelfde orde. Men kan dus zich afvragen wat het minimale aantal distributie-punten van de tweede orde (ofwel detaillisten) is, waaraan men nog net voldoende heeft. Daarbij spelen natuurlijk ook andere overwegingen een rol, die hier niet besproken worden. Men zal wellicht voor een bepaald produkt verlangen, dat de transportweg naar de uiteindelijke klant beneden een bepaalde afstand blijft.
- b) eliminatie van een schakel in de keten, wat in dit voorbeeld betekent: ofwel eliminatie van de grossier (resp. van de voorraadhoudende functie van de grossier) ofwel eliminatie van de detaillist (resp. van de voorraadhoudende functie van de detaillist). Nogmaals zij er met nadruk op gewezen, dat deze conclusie alleen geldt bij de veronderstelling, zoals Forrester die in zijn voorbeeld maakte.
- c) snelle levering uit voorraad vanuit het fabrieksmagazijn.

- 198 -

- 3) Als men zich bij de bepaling van het produktieniveau vooral baseert op het gedrag van de uiteindelijke klantenvraag (en veel minder op de order portefeuille van de fabriek en de daar binnenkomende orderstroom) dan worden de slingeringen in het produktieniveau sterk teruggebracht, in Forresters voorbeeld tot minder dan de helft. Men kan deze maatregel o.a. concretiseren, door zich te baseren op de integrale voorraad informatie (de totale voorraad in het hele systeem).
- 4) Een goede lange-termijnplanning met goede voortgangscntrole heeft eveneens een dempende werking (feed-forward!).
- 5) Speciaal wanneer de gehele keten zich (anders dan in het voorbeeld) binnen één concern bevindt, geldt dat bij alle betrokkenen goed begrip en inzicht moet worden aangekweekt voor de gevolgen die hun gedrag kan hebben voor anderen in de keten.
- 6) Het snel doorgeven van informatie en goederen heeft op zichzelf een gunstige invloed op het opslinger-effect, doordat de vertragingstijden afnemen. Deze invloed is echter niet groot. Wel heeft een snellere levering tot gevolg, dat de voorraden "buiten" *) lager worden en dat heeft, zoals in punt 2 gezegd werd, een dempende werking.

Uit het bovenstaande kan als algemene conclusie getrokken worden dat men bijzonder voorzichtig moet zijn met acties, die in een keten slingereffecten teweeg kunnen brengen. Als men bijv. eens alle bevoorradingspunten aan het einde van een keten zou laten bevoorraden volgens een (B,Q)- systeem en als men alle punten eenmaal per jaar op hetzelfde moment hun B- en Q-niveaus zou laten herzien, zou daardoor een sterke "schokgolf" ontstaan. Een dergelijke aanpassing dient geleidelijk plaats te vinden.

*) d.w.z. aan het uiteinde van de keten, buiten het centrale magazijn.

- 199 -

Literatuur industriële dynamica.

- | | |
|--|----|
| 1) J.W. Forrester - "Industrial dynamics" Wiley, London-New York; 1961. | x |
| 2) J.W. Forrester - "Industrial dynamics- A Major Breakthrough for Decision Makers; Harvard Business Review; vol. 36, no 4 pag. 37-66. July-August 1958. | xx |
| 3) W. Bakker - "Industriële dynamica en signaalstroom-diagrammen" Med. SOR 3 (1964) no 6. | |
| 4) J.W. Forrester - "Managerial decision making" in "Management and the computer of the future" door M. Greenberger, MIT Press en Wiley 1962. | xx |
| 5) W.E. Jarman - "Problems in industrial dynamics" MIT Press 1963. | G |
| 6) W. Schalkwijk - "Industriële dynamica" Med. SOR. | |
| 7) L.E. Groosman - "Industriële Dynamica" Philips Administration Review 1964-12. | |

APPENDIX

Hoofdstuk A.

Enige definities uit de waarschijnlijkheidsrekening.

Heeft een grootheid x een bepaald waardenbereik en is aan elk van deze waarden van x de waarschijnlijkheid toegevoegd dat deze waarde optreedt, dan spreekt men van een stochastische grootheid x met bijbehorende kansverdeling of kansdichtheid. Het waardenbereik kan zowel eindig als oneindig zijn;

- het aantal met 2 dobbelstenen geworpen ogen is nooit groter dan 12 en nooit kleiner dan 2.
- het aantal malen dat men met 2 dobbelstenen moet gooien alvorens men voor de eerste maal dubbel zes gooit is theoretisch onbegrensd.

Het waardenbereik kan verder discreet of continu zijn;

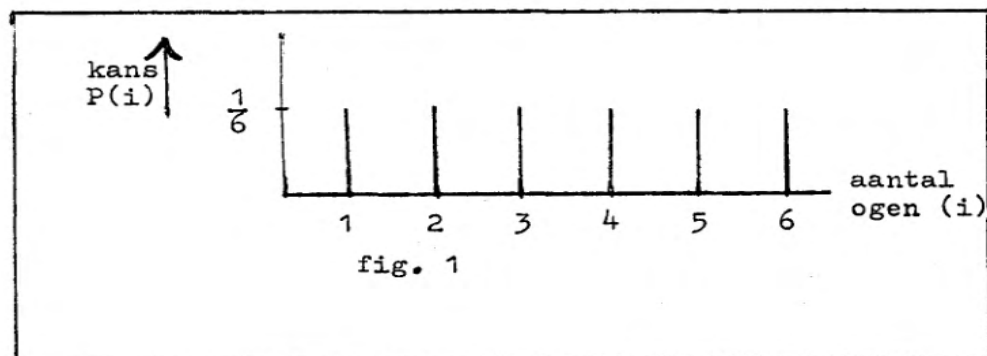
- het aantal ogen, met 2 dobbelstenen geworpen, is steeds een geheel getal.
- tijdsintervallen tussen twee gebeurtenissen kunnen ook alle tussenliggende waarden aannemen.

Er is een belangrijk verschil tussen de kansdichtheid van discrete en van continue grootheden.

Een discrete variabele bezit een kansdichtheid, die slechts voor een verzameling discrete punten gedefinieerd is.

We kunnen zo'n verdeling door een staafdiagram weergeven.

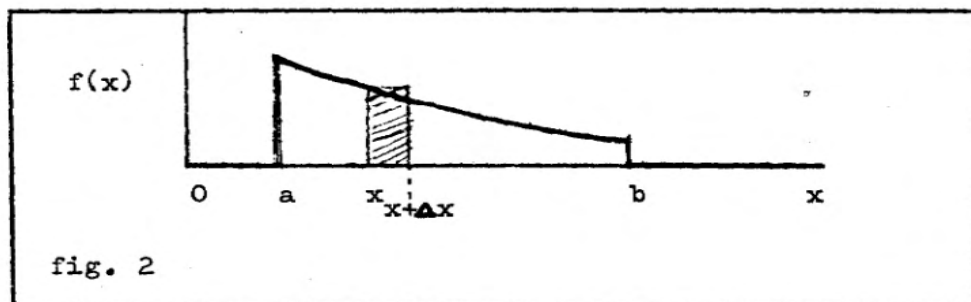
Bijvoorbeeld: de kansdichtheid van het aantal ogen bij een worp met één zuivere dobbelsteen is in fig. 1 gegeven.



- 2 -

Bij een continue grootheid is de kansdichtheid voor iedere waarde binnen het beschouwde interval gedefinieerd. De kans op het optreden van precies die waarde is daarvoor nul geworden. Noemen we de dichtheid $f(x)$, dan stellen we, in plaats daarvan:

$f(x)dx$ = de kans dat x ligt tussen x en $x + dx$.



N.B. Steeds moet gelden dat de som van alle kansen gelijk aan 1 wordt, in het continue geval dus (zie fig. 2).

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

Een belangrijk begrip i.v.m. kansdichtheden is de zgn. "(mathematische) verwachting" aangeduid met E ("expectation"). De verwachting van $\varphi(x)$ wordt gedefinieerd als

$$E\{\varphi(x)\} = \int_a^b \varphi(x) f(x)dx \quad \dots\dots\dots(2)$$

Nemen we $\varphi(x) = x$, dan ontstaat de verwachting van x :

$$E(\underline{x}) = \int_a^b x f(x)dx \quad \dots\dots\dots(2a)$$

Deze grootheid wordt ook wel het gemiddelde of het zwaartepunt van de kansdichtheid $f(x)$ genoemd.

Voor $\varphi(x) = x^n$ ontstaat het zgn. " n^e moment van $f(x)$:"

$$\mu_n = \int_a^b x^n f(x)dx. \text{ Merk op: } \mu_1 = E(\underline{x}).$$

- 3 -

Een andere belangrijke grootheid in dit verband is de variantie.

Deze grootheid, aangeduid als $\sigma^2(\underline{x})$ of $\text{var}(\underline{x})$ wordt gedefinieerd als

$$\sigma^2(\underline{x}) = E[\underline{x} - E(\underline{x})]^2 = \int_a^b [x - E(\underline{x})]^2 f(x) dx \dots (3)$$

Hoe kleiner de spreiding, hoe meer $f(x)$ om zijn gemiddelde geconcentreerd is.

Uit (3) kunnen we afleiden:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\underline{x}) &= \int_a^b \{x^2 - 2x \cdot E(\underline{x}) + [E(\underline{x})]^2\} f(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 f(x) dx - 2E(\underline{x}) \int_a^b x f(x) dx + [E(\underline{x})]^2 \int_a^b f(x) dx \\ &= E(\underline{x}^2) - 2E(\underline{x}) \cdot E(\underline{x}) + [E(\underline{x})]^2 \\ &= E(\underline{x}^2) - [E(\underline{x})]^2 \end{aligned}$$

$$\text{dus: } \boxed{\text{var}(\underline{x}) = E(\underline{x}^2) - [E(\underline{x})]^2} \dots (4) \quad *)$$

Van deze relatie zullen we vaak gebruik maken.

Voor het discrete geval gelden analoge beschouwingen, resulterend in:

$$\sum_{x=a}^b P(x) = 1 \dots (1')$$

$$E[\psi(\underline{x})] = \sum_{x=a}^b \psi(x) P(x) \dots (2')$$

$$E(\underline{x}) = \sum_{x=a}^b x P(x) \dots (2a')$$

$$\sigma^2(\underline{x}) = \sum_{x=a}^b [x - E(\underline{x})]^2 P(x) \dots (3)$$

Formule (4) geldt ongewijzigd.

*) Anders geformuleerd:

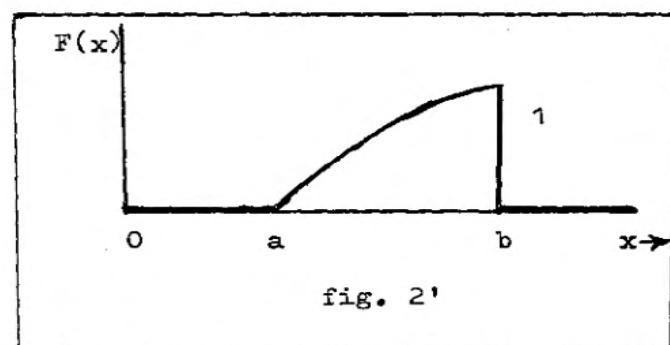
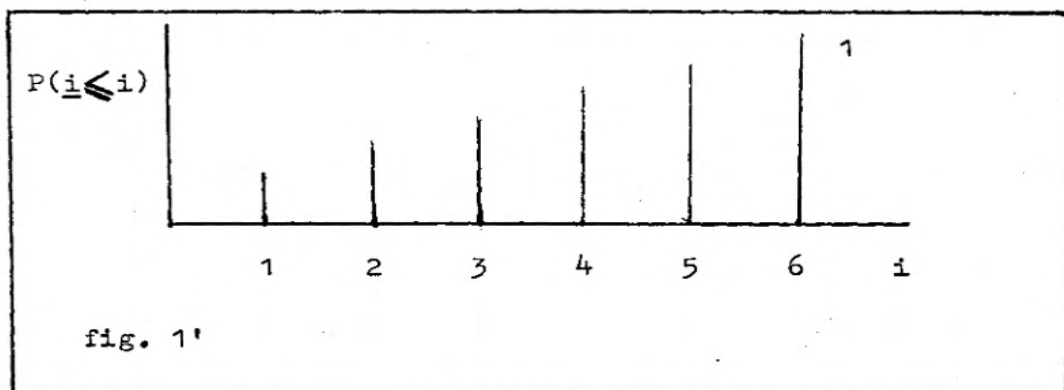
$$\boxed{\text{var } x = \mu_2 - \mu_1^2}$$

- 4 -

Men gebruikt ook wel de zgn. cumulatieve verdeling:

$$P(\underline{i} \leq i) = \sum_{j=a}^i P(j) \quad \text{resp. } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

De figuren 1 en 2 gaan dan over in:



N.B. - Cumulatieve verdelingsfuncties nemen aan de bovengrens van het interval de waarde 1 aan.

B.v. bij het gooien met één steen geldt:

$P(\underline{i} \leq 6) = \text{kans op 6 ogen of minder} = 1.$

- Kennelijk geldt in het continue geval: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

- Stochastische grootheden worden vaak onderstreept.

Literatuur [3], [4]

- 5 -

Hoofdstuk B.

Afleiding van de Binominale-verdeling.

Veronderstel dat we een experiment n maal achtereenvolgens herhalen, terwijl iedere herhaling resulteert in of een succes (S) of een misser (M).

Laat de kans op een succes p bedragen (de kans op een mislukking dus $1 - p = q$).

We zijn nu geïnteresseerd in de kansdichtheid van het aantal K successen.

Stel dat we in een bepaalde reeks van n experimenten K maal succes boeken en blijkbaar $n - K$ maal een misser, bijv.: SMMSM (voor $K = 2, n = 5$).

De kans op deze reeks bedraagt, (wanneer we de experimenten onafhankelijk veronderstellen: dus het resultaat van een experiment niet laten afhangen van dat van andere experimenten)

$$P(K = K) = p^K q^{n-K} \quad (\text{produktregel})$$

Nu kan men deze K successen uit n experimenten op meerdere manieren verkrijgen. In ons voorbeeld:

S M M S M

M M M S S

M M S M S

enz.

Ieder van deze reeksen heeft dezelfde kans van optreden p^2q^3 . Het aantal verschillende reeksen dat kan optreden is gelijk aan het aantal manieren waarop men een groep van K uit een totaal van n elementen kan nemen.

Dit aantal bedraagt

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$$

zodat we tenslotte voor de totale kans op K successen vinden:

$$P(K, n) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$$

- 6 -

Voor een kansverdeling moet gelden, zoals we zagen,

$$\sum_{K=0}^n P(K,n) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Controle: } \sum_{K=0}^n \binom{n}{K} p^K q^{n-K} &= \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} p^n = \\ &= (p + q)^n \\ &= 1 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Voor het gemiddelde van de binominale kansverdeling volgt uit de definitie:

$$\begin{aligned} E(K) &= \sum_{K=0}^n K P(K,n) = \\ &= np \sum_{K=1}^n \frac{(n-1)!}{(K-1)!(n-K)!} p^{K-1} q^{n-K} \\ &= np \cdot \sum_{K=1}^n P(K-1, n-1) \\ &= np \end{aligned}$$

en voor de spreiding:

$$\begin{aligned} \sigma^2(K) &= \sum_{K=0}^n (K-np)^2 \cdot P(K,n) \\ &= \sum_{K=0}^n K^2 P(K,n) - 2np \sum_{K=0}^n K P(K,n) + n^2 p^2 \sum_{K=0}^n P(K,n) \\ &= \sum_{K=0}^n K^2 P(K,n) - n^2 p^2. \end{aligned}$$

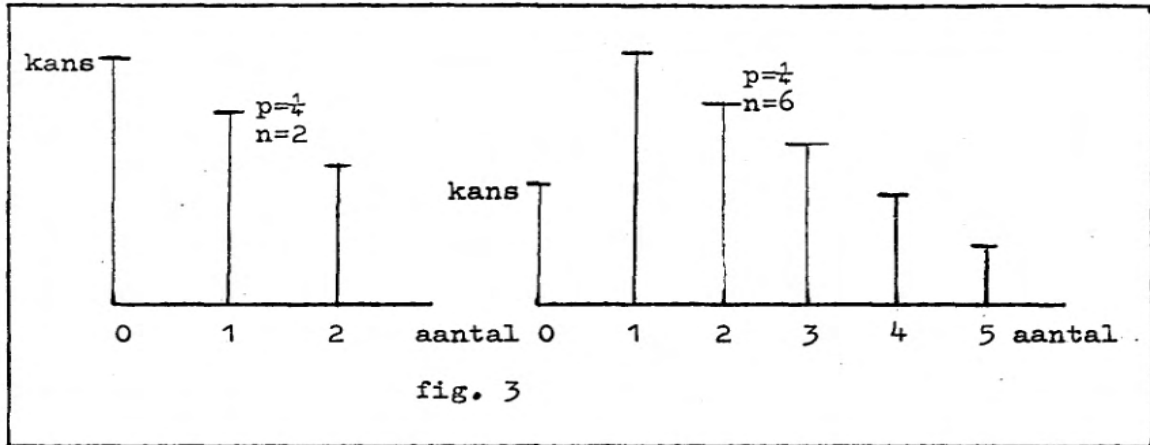
Voor de eerste term uit het rechterlid kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \sum_{K=0}^n K^2 P(K,n) &= np \sum_{K=0}^n K P(K-1, n-1) \\ &= np \sum_{K=0}^n (K-1) P(K-1, n-1) + np \sum_{K=0}^n P(K-1, n-1) \\ &= np(n-1)p + np \\ &= np(np-p+1) \\ &= n^2 p^2 + npq \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \sigma^2(K) = n^2 p^2 + npq - n^2 p^2 = npq.$$

N.B. De binominale kansverdeling is een verdeling van aantallen, is derhalve een discrete verdeling, zoals ook uit de figuren blijkt.

- 7 -



Literatuur [3][4]

Hoofdstuk C.

Afleiding van de Poisson-verdeling.

Voor de kans op K successen uit n experimenten, met voor elk experiment een kans op succes p kunnen we schrijven (zie hoofdstuk B):

$$P(K, n) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K} \dots\dots\dots (1)$$

met $\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$ en $q = 1-p$

De uitdrukking

$$\frac{P(K, n)}{P(K-1, n)} = \frac{\binom{n}{K} p^K q^{n-K}}{\binom{n}{K-1} p^{K-1} q^{n-K+1}} = \frac{n-K+1}{K} \cdot \frac{p}{q} \dots\dots\dots (2)$$

geeft blijkbaar de verhouding aan tussen 2 functiewaarden voor opvolgende waarden van K .

Bovendien volgt uit (1):

$$P(0, n) = (1-p)^n \dots\dots\dots (3)$$

Stel nu het geval, dat de elementaire kans op succes, p , zeer klein wordt, terwijl we n laten groeien zó, dat het produkt

$$\lambda = n \cdot p \dots\dots\dots (4)$$

matig groot blijft.

We kunnen nu p uit (4) in (3) substitueren:

$$P(0, n) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \dots\dots\dots (5)$$

We nemen nu de logaritmie van (5) en ontwikkelen het resultaat in een reeks:

$$\log P(0, n) = n \cdot \log\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = n\left(-\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2} - \dots\dots\dots\right)$$

$$\log P(0, n) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{n} - \dots\dots\dots$$

voor grote n geldt:

$$\log P(0, n) \approx -\lambda$$

zodat

$$P(0, n) \approx e^{-\lambda}$$

Voor kleine p gaat (2) over in

$$\frac{P(K, n)}{P(K-1, n)} = \frac{n-K+1}{K} \cdot \frac{p}{q} = \frac{\lambda + p(1-K)}{q \cdot K} \approx \frac{\lambda}{K}$$

We kunnen dan achtereenvolgens afleiden:

$$P(1, n) \approx \frac{\lambda}{1} \cdot P(0, n) = \lambda \cdot e^{-\lambda}$$

$$P(2, n) \approx \frac{\lambda}{2} \cdot \lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

- 9 -

en algemeen:

$$P(K,n) \approx \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

de zgn. Poisson-verdeling
.....(6)

N.B. We zien dus dat een Poisson-verdeling ontstaat, wanneer we uitgaan van zeer veel experimenten, met elk een zeer kleine kans op succes.

Bijvoorbeeld, de kans dat een telefoonabonné in een bepaald interval t een gesprek wenst te beginnen is klein, maar er zijn veel abonnées, dus zal de vraag aan de centrale Poisson-verdeeld zijn.

De kans dat een bepaald onderdeel van een machine het begeeft is klein, maar als er veel machines zijn die stuk kunnen gaan zal de totale vraag naar reserve-onderdelen een Poisson-verdeling volgen.

Andere afleiding.

We kunnen de Poisson-verdeling echter ook geheel zelfstandig afleiden zonder bij een andere verdeling te beginnen.

Laten we een aantal niet nader te specificeren gebeurtenissen beschouwen, waarvan het al of niet optreden volledig door het toeval wordt bepaald.

We stellen dat de kans op één gebeurtenis binnen Δt in eerste benadering evenredig is met Δt :

$$P(m = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad *)$$

en de kansen op $m = 0$ resp. $m > 1$ gebeurtenissen:

$$P(m = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(m = j) = o(\Delta t) \quad (j > 1)$$

Stel nu $P_n(t)$ is de kans dat er op het tijdstip t in totaal n gebeurtenissen hebben plaatsgevonden. We kunnen dan tot de volgende balans geraken.

*) Onder het ordesymbool $o(\Delta t)$ wordt verstaan een uitdrukking in Δt , die voldoet aan de definitie $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

- 10 -

n op tijdstip $(t+\Delta t)$ betekent: n op tijdstip t ; geen erbij in Δt óf $(n-1)$ op tijdstip t ; één erbij in Δt ,

óf $n-j$ op tijdstip t ; j erbij in Δt ($j > 1$).

Uit de onderlinge onafhankelijkheid van de gebeurtenissen kunnen we dan afleiden, m.b.v. de definitie van $P_n(t)$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) \left\{ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \right\} + P_{n-1}(t) \left\{ \Delta t + o(\Delta t) \right\} + P_{n-j}(t) \left\{ o(\Delta t) \right\}$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \left\{ P_n(t) + P_{n-1}(t) + P_{n-j}(t) \right\} \quad (j > 1)$$

en voor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{Stel nu } \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n = \pi(t, z) \dots\dots\dots (8)$$

Vermenigvuldigen van (7) met z^n en sommeren van 0 tot ∞ geeft, na substitutie van (8)

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \lambda z \pi - \lambda \pi$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \lambda (z-1) \pi$$

Deze differentiaal-vergelijking heeft als oplossing

$$\pi = c e^{\lambda(z-1)t}$$

$$\text{Als } z=1 \text{ geldt } \pi(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \text{ (som van alle kansen)}$$

dus $c=1$ en

$$\pi = e^{\lambda t(z-1)} = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^i}{i!} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n$$

Stellen we tenslotte de coëfficiënten van overeenkomstige machten van z gelijk, dan vinden we

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \dots\dots\dots (9)$$

- 11 -

Hierin betekende λ het aantal gebeurtenissen per tijdseenheid. Noemen we het aantal gebeurtenissen per interval t

$$\lambda' = \lambda t$$

dan gaat (9) over in

$$P_n(t) = \frac{\lambda'^n e^{-\lambda'}}{n!}$$

Uit de veronderstelling, dat het aantal gebeurtenissen in een interval Δt slechts afhangt van de grootte van Δt , en bv. niet van het aantal gebeurtenissen dat al heeft plaatsgevonden volgt in de praktijk dat de populatie van mogelijke gebeurtenissen waaruit a.h.w. getrokken wordt zeer groot moet zijn.

Deze eis kwamen we ook tegen bij de eerste afleiding van de Poisson-formule.

Bezien we een groep van bv. 5 machines; alle vijf komen ze voor een defect in aanmerking. Gaat één machine stuk, dan is tijdens de reparatieperiode de kans dat (weer) een machine stuk gaat kleiner geworden, omdat er nu nog maar vier beschikbaar zijn.

Het is duidelijk, dat hoe groter het aantal machines ($N \rightarrow \infty$) en hoe kleiner de kans op een defect ($p \rightarrow 0$) hoe beter aan de Poisson-conditie zal zijn voldaan.

Evenals de binominale verdeling, is ook de Poisson-verdeling een verdeling van aantallen: dus discreet, zoals de figuren demonstreren.

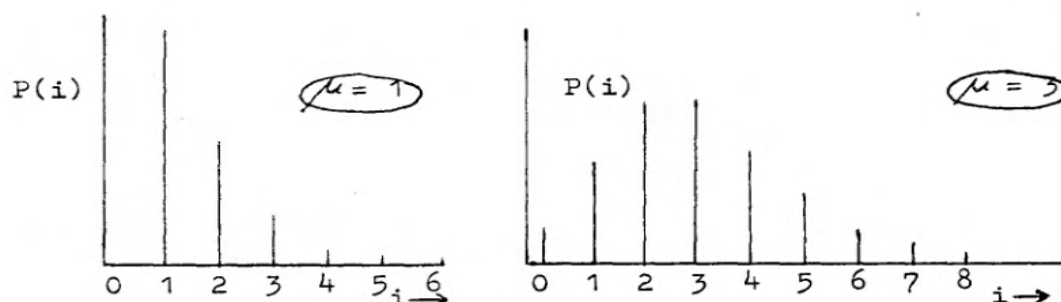


Fig. 4

Gemiddelde en spreiding van een Poisson-verdeling.

Voor de binomiale kansverdeling geldt

$$E(\underline{K}) = np$$

$$\text{var}(\underline{K}) = npq \quad (\text{zie hoofdstuk B})$$

In de limietovergang van binominaal naar Poisson, geldt

$$E(\underline{K}) = np \rightarrow \lambda$$

$$\text{immers } n \rightarrow \infty$$

$$\text{var}(\underline{K}) = npq \rightarrow \lambda$$

$$p \rightarrow 0$$

$$q \rightarrow 1$$

Blijkbaar geldt voor de Poisson-verdeling dat de verwachting gelijk is aan de variantie.

Beide zijn gelijk aan λ , de enige parameter uit de verdeling.

Literatuur [3] [4]

Hoofdstuk D.Verband tussen de Poisson-verdeling en de negatief exponentiële.

Stelling: als het aantal gebeurtenissen per tijdseenheid Poisson-verdeeld is, dan volgen de intervallen tussen twee opeenvolgende gebeurtenissen een negatief exponentiële verdeling.

De verwachtingen van beide verdelingen zijn elkaars omgekeerde.

Bewijs: Zij $f(t)$ de verdeling van de intervallen.

Voor het optreden van een interval met lengte tussen t en $t+\Delta t$ moet aan twee condities zijn voldaan;

- geen gebeurtenis gedurende t : kans $P_0(t)$
- een gebeurtenis gedurende Δt : kans $P_1(\Delta t)$

Vanwege de onderlinge onafhankelijkheid geldt de produkt-regel:

$$f(t) \Delta t = P_0(t) \cdot P_1(\Delta t)$$

$$\text{met : } P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$\text{zodat } f(t) \cdot \Delta t = e^{-\lambda t} \cdot \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t e^{-\lambda(t+\Delta t)}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t+\Delta t)}$$

of met $\Delta t \rightarrow 0$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

de neg. exp. verdeling

Ter contrôle:

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d(\lambda t) = -e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = 1 \text{ q.e.d.}$$

Voor de verwachting geldt:

$$E(t) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} t d e^{-\lambda t}$$

$$= t e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

Voor de spreiding geldt:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - \frac{1}{\lambda})^2 f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} t f(t) dt + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} f(t) dt.$$

$$\int_0^{\infty} t^2 f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{2!}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Voor de neg. exp. verdeling geldt dus dat de verwachting de wortel uit de variantie is.

Vgl. hoofdstuk C: de Poisson-verdeling.

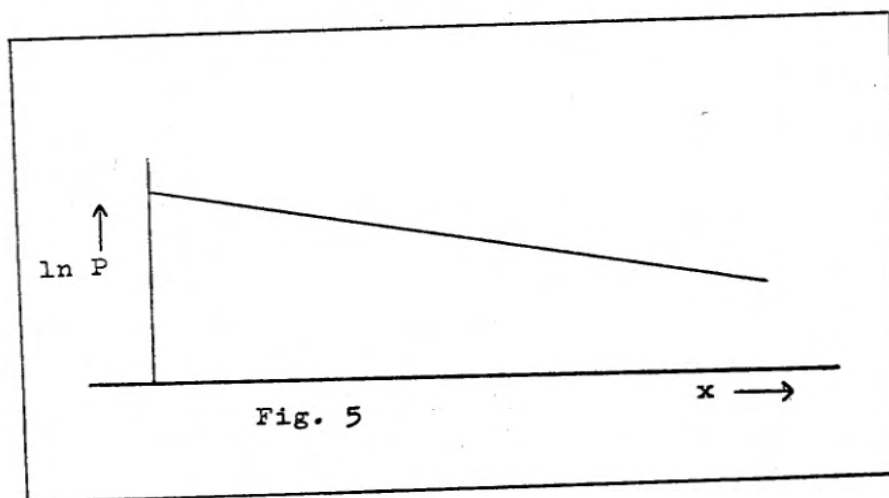
Voor de cumulatieve verdeling geldt

$$P(\underline{t} > x) = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{-\lambda} \Big|_x^{\infty} = e^{-\lambda x}$$

Hieruit volgt:

$$\ln P(\underline{t} > x) = -\lambda x$$

N.B. De negatief exp. verdeling is continu, in tegenstelling tot de Poisson-verdeling.



Hoofdstuk E.De χ^2 -verdeling

De χ^2 -verdeling kan beschouwd worden als een meer algemene verdeling, waarvan de negatief exp. een bijzonder geval is. De formule voor de kansdichtheid luidt:

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x/a}}{a^n (n-1)!} \dots\dots\dots(1)$$

We kunnen de χ^2 -verdeling zien, als de verdeling van de som van n trekkingen, alle gedaan uit de zelfde neg. exp. verdeling.

Bewijs: via volledige inductie

$$f_1(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a} \quad \text{dit is de negatief exp. verdeling}$$

Stel $f_n(x)$ is de verdeling van de som van n trekkingen uit de neg. exp. verdeling.

Voor de som van n+1 trekkingen kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} f_n(x) * f_1(x) &\stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^x f_n(t) f_1(x-t) dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{n-1} e^{-t/a}}{a^n (n-1)!} \cdot \frac{1}{a} e^{-\frac{(x-t)}{a}} dt \\ &= \frac{e^{-x/a}}{a^{n+1} (n-1)!} \int_0^x t^{n-1} dt = \frac{x^n e^{-x/a}}{a^{n+1} n!} \stackrel{\text{def.}}{=} f_{n+1}(x) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

N.B. We maakten hier gebruik van de zgn. "convolutie".

stel x heeft een kansdichtheid $f(x)$

y heeft een kansdichtheid $g(y)$

Wat is dan de kansverdeling van $z = x + y$?

Noem deze functie $h(z)$; zijn cumulatieve $H(z)$.

- 16 -

We kunnen dan stellen

$$P(\underline{z} < z) = P(\alpha \leq \underline{x} \leq \alpha + d\alpha) \cdot P(\underline{y} < z - \alpha)$$

Dit geldt voor alle waarden van α , dus:

$$H(z) = \int_0^z f(\alpha) G(z - \alpha) d\alpha$$

differentieren naar z levert:

$$h(z) = \int_0^z f(\alpha) g(z - \alpha) d\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f(x) * g(y)$$

Substitueren we $z - \alpha = \alpha'$ dan ontstaat:

$$h(z) = \int_0^z g(\alpha') h(z - \alpha') d\alpha' \stackrel{\text{def}}{=} g(x) * f(y)$$

Deze symmetrie was te verwachten wegens de symmetrie van de optelling $z = x + y = y + x$. De verwachting van $\underline{x}$ wordt op de bekende manier afgeleid:

$$\begin{aligned} E(\underline{x}) &= \int_0^\infty x f_n(x) dx = \int_0^\infty \frac{x^n e^{-x/a}}{a^n (n-1)!} dx = \frac{1}{a^n (n-1)!} \int_0^\infty (at)^n e^{-t} a dt = \\ &= \frac{a}{(n-1)!} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \frac{a}{(n-1)!} \cdot n! = an. \end{aligned}$$

Analoog vindt men:

$$\text{var}(\underline{x}) = \int_0^\infty (x - an)^2 f_n(x) dx = \dots = a^2 n$$

Zien we $f_n(x)$ weer als de verdeling van de som van n trekkingen uit de neg. exp. verdeling met gemiddelde a , dan liggen deze resultaten wel in de lijn der verwachtingen:

$$\mu_{\text{som}} = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = a + a + \dots + a = an$$

$$\sigma_{\text{som}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 = a^2 + a^2 + \dots + a^2 = na^2$$

Het maximum van $f_n(x)$ (de modus) ligt bij $x = (n-1)a$;

dit is de waarde waarvoor

$$\frac{\partial f_n(x)}{\partial x} = 0$$

geldt.

Literatuur [3] [12]

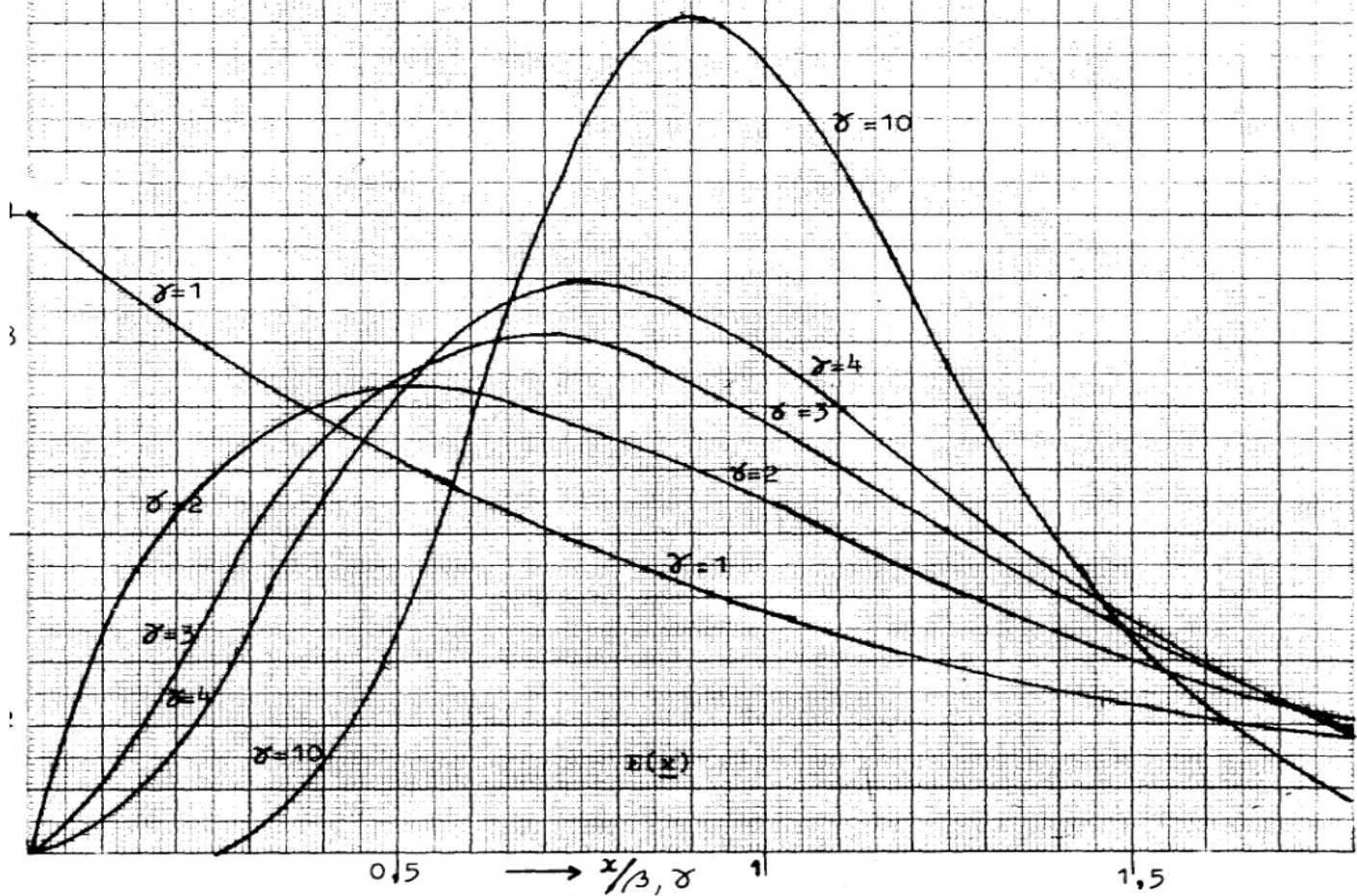
- 17 -

fig. 1

Enkele gamma-verdelingen

$$y = \frac{x^{\delta-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\delta} \Gamma(\delta)}$$

notatie in deze figuur	notatie in de tekst
$\frac{\delta}{\beta}$ x	$\frac{\delta}{\beta}$ x



Hoofdstuk F.De vraag per periode.

De totale vraag naar een produkt in een bepaalde periode wordt bepaald door

- het aantal aankopen in die periode (N)
- de grootte van de aankopen (x)

De totale vraag kunnen we dan schrijven als

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

Vaak zullen de grootheden x_i en N stochastisch zijn:

$$E(\underline{x}) \text{ var}(\underline{x}), E(\underline{N}) \text{ var}(\underline{N})$$

Men kan dan geïnteresseerd zijn in de verdeling van $\underline{S}$.

Eerst de verwachting van $\underline{S}$

$$E(\underline{S}/\underline{N} = N) = E(\underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_N / \underline{N} = N) = N \cdot E(\underline{x})$$

$$\begin{aligned} E(\underline{S}) &= \sum_N E(\underline{S}/\underline{N} = N) P(\underline{N} = N) = \sum_N N \cdot E(\underline{x}) P(\underline{N} = N) \\ &= E(\underline{x}) \sum_N N P(\underline{N} = N) = E(\underline{x}) \cdot E(\underline{N}) \end{aligned}$$

dus $E(\underline{S}) = E(\underline{x}) \cdot E(\underline{N})$

Voor de berekening van $\text{var}(\underline{S})$ gaan we uit van $E(\underline{S}^2)$;

$$\begin{aligned} E(\underline{S}^2 / \underline{N} = N) &= [E(\underline{S} / \underline{N} = N)]^2 + \text{var}(\underline{S} / \underline{N} = N) \\ &= N^2 \cdot \{E(\underline{x})\}^2 + \text{var}(x_1 + \dots + x_N / \underline{N} = N) \\ &= N^2 \{E(\underline{x})\}^2 + N \text{var}(\underline{x}) \\ E(\underline{S}^2) &= \sum_N E(\underline{S}^2 / \underline{N} = N) \cdot P(\underline{N} = N) \\ &= \sum_N P(\underline{N} = N) [N^2 \{E(\underline{x})\}^2 + N \text{var}(\underline{x})] \\ &= \{E(\underline{x})\}^2 \sum_N N^2 P(\underline{N} = N) + \text{var}(\underline{x}) \sum_N N P(\underline{N} = N) \\ &= \{E(\underline{x})\}^2 [E(\underline{N})^2 + \text{var}(\underline{N})] + \text{var}(\underline{x}) \cdot E(\underline{N}) \end{aligned}$$

Tevens geldt:

$$E(\underline{S}^2) = \left\{ E(\underline{S}) \right\}^2 + \text{var}(\underline{S})$$

Zodat we door substitutie kunnen afleiden:

$$\text{var}(\underline{S}) = \left\{ E(\underline{x}) \right\}^2 \left\{ E(\underline{N}) \right\}^2 + \left\{ E(\underline{x}) \right\}^2 \cdot \text{var}(\underline{N}) + \text{var}(\underline{x}) \cdot E(\underline{N}) - \left\{ E(\underline{x}) \right\}^2 \left\{ E(\underline{N}) \right\}^2$$

ofwel

$$\text{var}(\underline{S}) = E(\underline{x})^2 \cdot \text{var}(\underline{N}) + \text{var}(\underline{x}) \cdot E(\underline{N})$$

Literatuur [3]

Hoofdstuk G.De lognormale verdeling.

Het gebeurt wel eens, dat niet een grootte x normaal verdeeld is, maar wel zijn logaritme $y = \log x$.

We noemen x dan lognormaal verdeeld.

Noemen we de beide parameters weer μ en σ , dan is de formule voor de verdelingsfunctie:

$$-\frac{1}{2} \frac{(\log x - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$f(x)dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log x - \mu)^2}{\sigma^2}} \frac{dx}{x}$$

Stellen we de eerste afgeleide naar x gelijk aan 0, dan vinden we voor de modus van de verdeling: $x = e^{\mu - \sigma^2}$

Gemiddelde en spreiding bedragen

$$E(x) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; \text{ var}(x) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \dots\dots\dots (1)$$

zoals op de gebruikelijke manier kan worden bewezen.

Voor de variatiecoëfficiënt geldt blijkbaar

$$\frac{\sigma(x)}{E(x)} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

Voor de mediaan vinden we e^{μ} .

De functie $f(x)$ is scheef en slechts gedefinieerd voor positieve x .

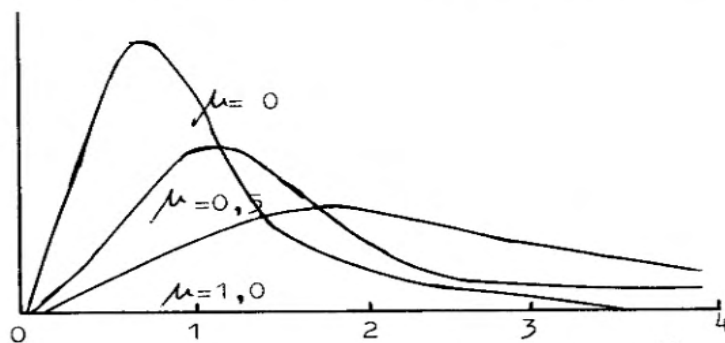


Fig. 6 Enige lognormale verdelingen met $\sigma^2 = 0,5$

Met name bij sociaal-economische problemen vindt deze verdeling toepassing; bijvoorbeeld bij de verdeling van

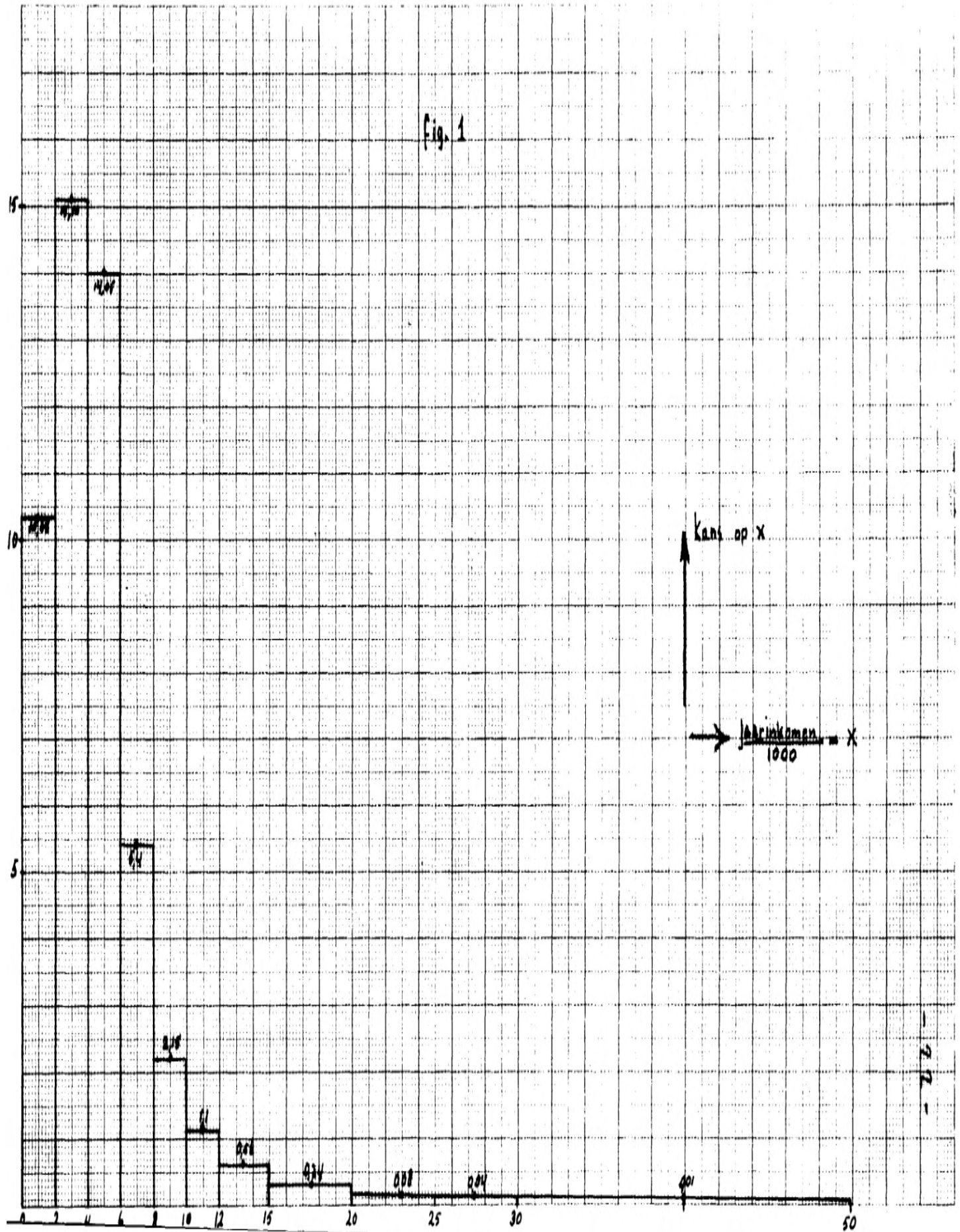
- inkomens van particulieren
- banksaldi van particulieren

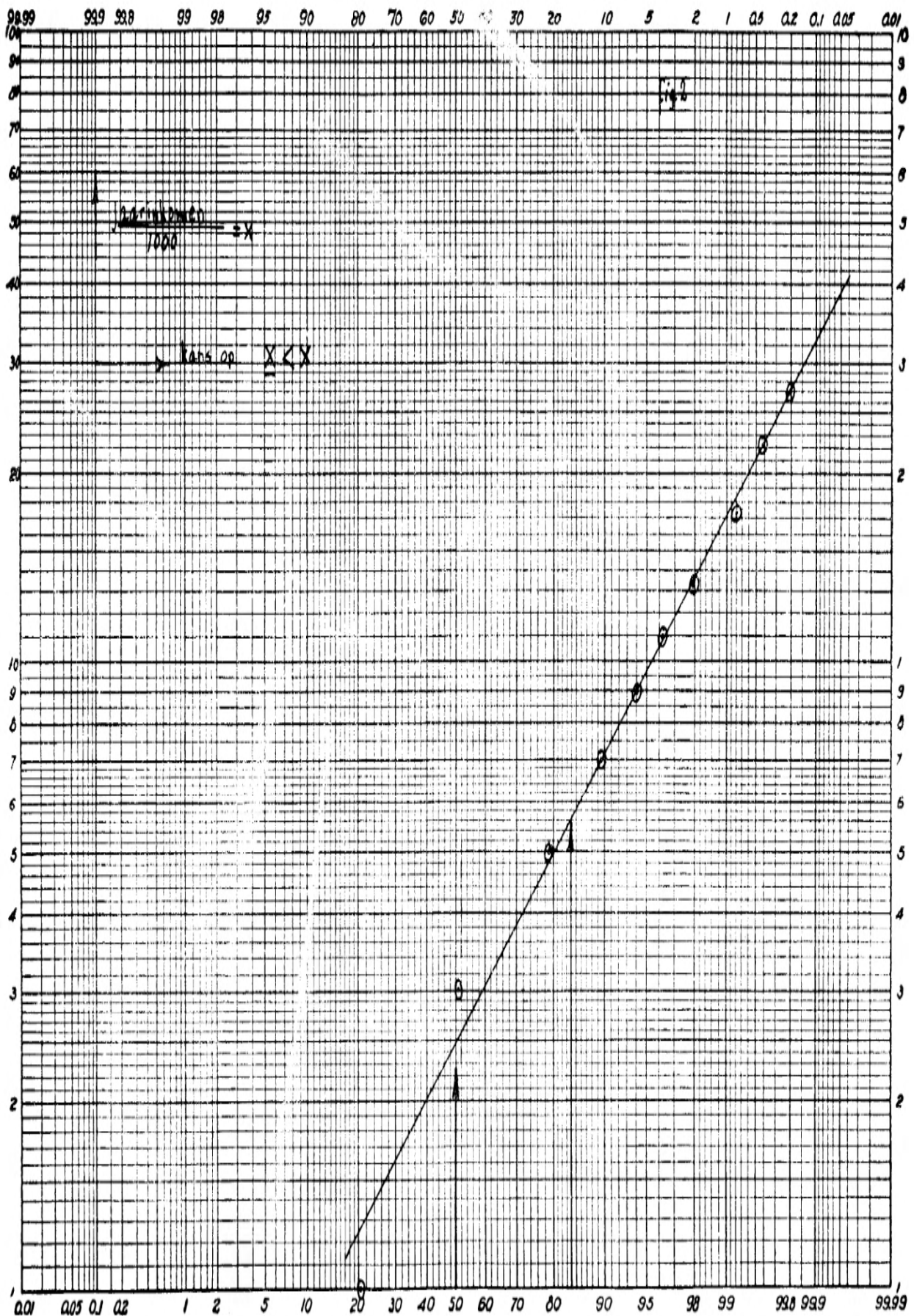
- 21 -

- het aantal employeés in dienst van industriële bedrijven
- het aantal inwoners van gemeenten

In "Economisch-Statistische Berichten" van 22 juli 1964 komt een tabel voor, die het aantal Nederlandse belastingplichtigen geeft, verdeeld over diverse inkomensklassen (gegevens uit 1959).

besteedbaar inkomen x f 1000,=	aantal belasting- plichtigen in pCt	cumulatief percentage
2	20,7	20,7
2 < 4	30,2	50,9
4 < 6	28,1	79,0
6 < 8	10,8	89,8
8 < 10	4,3	94,1
10 < 12	2,2	96,3
12 < 15	1,7	98,0
15 < 20	1,2	99,2
20 < 25	0,4	99,6
25 < 30	0,2	99,8
30 < 50	0,2	100,0
> 50	0,0	100,0





D. 11.11.11 M. 11.11.11 M. 11.11.11

- 24 -

Figuur 1 geeft deze tabel in grafievorm op lineaire schaal. Zouden we het jaarinkomen logaritmisch uitzetten, dan zou de kromme tot de normale verdeling moeten naderen.

Om dit na te gaan gebruiken we het zgn. log-normale grafiek-papier, waardoor de geaccumuleerde van een normale verdeling als een rechte lijn wordt afgebeeld.

De mate waarin de meetpunten van een rechte lijn afwijken, is dus een maat voor de afwijking van de log-normale verdeling van de bewuste grootte.

In ons geval ontstaat fig. 2 waar de meetpunten zeer goed aan een rechte kunnen worden aangepast.

Zijn we eenmaal zo ver, dan kunnen we uit de grafiek μ en σ afleiden. Bijvoorbeeld: het punt, waar de rechte het 50% niveau passeert is per definitie de mediaan.

In ons geval dus:

$$2500 = e^{\mu} \dots\dots\dots(2)$$

Bovendien weten we, dat bij de normale verdeling 84% van het oppervlak onder de kromme links van de grens $\mu + \sigma$ ligt.

Dus:

$$e^{\mu + \sigma} = 5600 \dots\dots\dots(3)$$

Uit (2) en (3) valt af te leiden

$$\mu = \ln 2500 = 7,824$$

$$\sigma = \ln 2,24 = 0,806$$

welke gegevens voor gemiddelde en spreiding van de inkomstenverdeling opleveren:

$$E(x) = 3450$$

$$\sigma(x) = 3308 \quad *)$$

Een belangrijke toepassing van de lognormale verdeling vinden we in de vraag naar artikelen, volgens jaaromzet gerangschikt.

Maken we klassen van bepaalde jaaromzetten en gaan we na hoeveel produkten uit het assortiment in elke klasse vallen, dan ontstaat vaak een lognormale verdelingsfunctie.

Literatuur [5] [6]

*) Wegens $\sigma^2 \approx \ln 2$ is de variatiecoëfficiënt hier ongeveer gelijk aan 1: de verdeling is vrijwel negatief exponentieel.

Hoofdstuk H.

Enige resultaten van de wachttijdtheorie.

Wij beschouwen geval **7** uit de tabel op pag. 110 :

- het aantal potentiële klanten is zeer groot; dit is vervat in de veronderstelling: de kans op een binnenkomst is in elk interval Δt even groot, dus de intervallen tussen 2 opeenvolgende aankomsten zijn negatief exponentieel verdeeld; $C_{SB} = 1$
- er staan C gelijkwaardige loketten parallel
- indien in een loket een klant bediend wordt, is voor elk interval Δt de kans even groot, dat de bediening beëindigd wordt, m.a.w. de bedieningstijden zijn negatief exponentieel verdeeld; $C_{SV} = 1$
- bediening in volgorde van binnenkomst in de rij
- het aantal wachtplaatsen is onbeperkt.

Notatie:

n = aantal klanten in het systeem, met inbegrip van de evt. klanten die bediend worden

$P_n(t)$ = de kans, dat op tijdstip t zich n klanten in het systeem bevinden

$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ = "kans dat in een interval Δt één klant aankomt (deze kans is onafhankelijk van het aantal klanten in het systeem)

$\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$ = kans dat in een interval Δt één klant vertrekt indien er bij aanvang van het interval n aanwezig zijn.

Analoog aan de behandeling in hoofdstuk C van de appendix stellen we de balansvergelijking op, dit maal betrokken op het aantal klanten in het systeem.

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) * \text{pr} \left\{ \text{niemand erin} \cap \text{niemand eruit} \right\} \\ + P_{n-1}(t) * \text{pr} \left\{ \text{één erin} \cap \text{niemand eruit} \right\} \\ + P_{n+1}(t) * \text{pr} \left\{ \text{niemand erin} \cap \text{één eruit} \right\}$$

We leiden af:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) [1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)] [1 - \mu_n \Delta t - o(\Delta t)] \\ + P_{n-1}(t) [\lambda \Delta t + o(\Delta t)] [1 - \mu_{n-1} \Delta t - o(\Delta t)] \\ + P_{n+1}(t) [1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)] [\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)] \quad n \geq 1$$

- 26 -

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) [1 - \lambda \Delta t - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)] \\ + P_{n-1}(t) [\lambda \Delta t + o(\Delta t)] \\ + P_{n+1}(t) [\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)]$$

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_n(t) (-\lambda - \mu_n + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}) \\ + P_{n-1}(t) (\lambda + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}) \\ + P_{n+1}(t) (\mu_{n+1} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t})$$

voor $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -P_n(t) [\lambda + \mu_n] + P_{n-1}(t) \lambda + P_{n+1}(t) \mu_{n+1}$$

Zodat voor de stationnaire situatie geldt:

$$(\lambda + \mu_n) P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) \quad (1)$$

T.a.v. μ_n merken we op dat $\mu_0 = 0$ (als er geen klanten in het systeem zijn, kan geen klant het systeem verlaten) voor $n = 0$ geldt daarom ($P_{-1} = 0$)

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) [1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)] \\ + P_1(t) [\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)]$$

en in het stationnaire geval

$$\lambda P_0 = \mu_1 P_1 \quad (2)$$

Uit verg. (1) en (2) leiden we af:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} P_1$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu_{n+1}} P_n \quad (3)$$

Hierin hangt de waarde van μ_{n+1} af van het aantal klanten dat bediend wordt ("ongeduldige klanten" worden buiten beschouwing gelaten). Geldt voor alle c loketten een identieke bedieningstijdverdeling, dan volgt

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n \leq c \\ c\mu & n > c \end{cases} \quad (4)$$

- 27 -

Rest nog de bepaling van P_0 in verg. (3). Voor de som van alle kansen kunnen we schrijven

$$1 = P_0 + \frac{\lambda}{\mu_1} P_0 + \frac{\lambda^2}{\mu_2 \mu_1} P_0 + \dots$$

$$\frac{1}{P_0} = 1 + \frac{\lambda}{\mu} P_0 + \frac{\lambda^2}{2! \mu^2} P_0 + \dots + \frac{\lambda^c}{c! \mu^c} P_0 + \frac{\lambda^{c+1}}{c! \mu^{c+1}} + \frac{\lambda^{c+2}}{c^2 c! \mu^{c+2}} + \dots$$

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{j=0}^c \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{c!} \sum_{j=c+1}^{\infty} \frac{1}{c^{j-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$$

De laatste term bevat een meetkundige reeks:

$$\frac{c^c}{c!} \sum_{j=c+1}^{\infty} \frac{1}{c^j} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \frac{c^c}{c!} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} c\right)^{c+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu} c}$$

mits $\frac{\lambda}{\mu c} < 1$; deze breuk wordt bezettingsgraad *) genoemd. Noemen we deze grootte r dan volgt dus:

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{j=0}^c \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{(rc)^c}{c!} \cdot \frac{r}{1-r} \quad (5)$$

Uit de verg. (3), (4) en (5) volgen tenslotte de gevraagde P_n

Speciale gevallen.

A) $c = 1$. Bevat het systeem één loket, dan volgt voor de som van de kansen

$$\begin{aligned} 1 &= P_0 + \frac{\lambda}{\mu_1} P_0 + \frac{\lambda^2}{\mu_2 \mu_1} P_0 + \dots \\ &= P_0 + \frac{\lambda}{\mu} P_0 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} P_0 + \dots \\ &= P_0 \left(\frac{1}{1-r} \right) \end{aligned}$$

$$\text{of } P_0 = 1-r \quad (6)$$

Substitutie in (3) geeft dan

$$P_n = r^n (1-r) \quad (7)$$

*) In de Engelse literatuur: "servers occupancy ratio" of "utilization factor".

- 28 -

B) $c \rightarrow \infty$. Is het aantal loketten zeer groot (er is in het limietgeval geen wachttijd voor de klant) dan volgt uit (3)

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{(n+1)\mu} P_n \quad (8)$$

en voor de som van de kansen

$$1 = P_0 + \frac{\lambda}{\mu} P_0 + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} P_0 + \dots$$

$$1 = P_0 e^r$$

$$P_0 = e^{-r} \quad (9)$$

Uit (3) volgt dan

$$P_n = \frac{r^n}{n!} e^{-r} \quad (10)$$

Verwachte aantal aanwezige klanten.

Voor $c = 1$ geldt

$$\begin{aligned} E(\underline{n}) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n r^n (1-r) \\ &= (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} n r^n = \frac{r}{1-r} \end{aligned}$$

dus

$$E(\underline{n}) = \frac{r}{1-r}$$

Voor $c \rightarrow \infty$:

$$E(\underline{n}) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{r^n}{n!} e^{-r}$$

$$E(\underline{n}) = r$$

De gemiddelde wachttijd $E(\underline{w})$ hangt natuurlijk af van het gemiddelde aantal klanten in het systeem.

Bevat het systeem $\underline{n}$ klanten, dan is de wachttijd voor een nieuw binnenkomende, $n+1^o$, klant gelijk aan de som van de bedienings tijden $\underline{v}$ van zijn n voorgangers.

$$\left. \begin{aligned} \underline{w} &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n \dots & n > 0 \\ \underline{w} &= 0 & n = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

- 29 -

Dit probleem is identiek met het in hoofdstuk F behandelde van de totale vraag in $\underline{N}$ aankopen.

We beschouwen de grootheden $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ weer als onderling onafhankelijke trekkingen uit dezelfde verdeling en kunnen dan meteen stellen

$$E(\underline{w}) = E(\underline{v}) \cdot E(\underline{n}) \dots\dots\dots (12)$$

of via (8)

$$\boxed{\frac{E(\underline{w})}{E(\underline{v})} = \frac{r}{1-r}} \dots\dots\dots (13)$$

Tot dusver hebben we steeds het geval bekeken van negatief-exponentieel verdeelde aankomst-intervallen zowel als bedienings-tijden. Ook als we deze laatste veronderstelling opgeven, en dus een algemene bedieningstijd-verdeling toelaten met gemiddelde $\frac{1}{u}$ kunnen we de zaak nog analytisch baas, zie bijv. Cox en Smith, Saaty.

Hoofdstuk J.De regel van Magee.

In zijn meest eenvoudige vorm luidt de lineaire beslissings-regel van Magee in formule:

$$\underline{P}_n = F_n + K(I^* - \underline{I}_n) \dots\dots\dots(1)$$

waarin voorstellen:

$\underline{P}_n$: de te bepalen produktie in het n^o tijdvak

F_n : de verwachte vraag in het n^o tijdvak $[= E(\underline{D})]$

K : de zgn "regelfactor"

I^* : de gewenste voorraad

$\underline{I}_n$: de feitelijke voorraad bij aanvang van het n^o tijdvak

De produktie wordt dus gebruikt om in de verwachte vraag te kunnen voorzien én om de voorraad naar de gewenste waarde te sturen. De mate waarin dit laatste gelukt is afhankelijk van de grootte van K .

Uiterste waarden van K zijn:

- $K=0$: er wordt uitsluitend naar de behoefte gepland onafhankelijk van de voorraadhoogte.

- $K=1$: iedere afwijking van de gewenste voorraadhoogte wordt door de produktie in het eerstvolgende tijdvak geëlimineerd.

Dus: een grotere waarde van K betekent grotere slingeringen in de produktie maar kleinere in de voorraad.

We kunnen berekenen hoe de variantie van $\underline{P}$ resp. $\underline{I}$ afhangt van die van de vraag $\underline{D}$.

Daartoe leggen we eerst verband tussen beginvoorraden van 2 opeenvolgende tijdvakken:

$$\underline{I}_{n+1} = \underline{I}_n + \underline{P}_n - \underline{D}_n \dots\dots\dots(2)$$

Hierin (1) gesubstitueerd levert na herleiding:

$$\underline{I}_{n+1} - I^* = (1-K)(\underline{I}_n - I^*) - (\underline{D}_n - F_n) \dots\dots\dots(3)$$

- 31 -

Stellen we de verwachte vraag onafhankelijk van n , dus $F_n = F$, dan verwaarlozen we trends etc. in het afnamepatroon.

Passen we vervolgens (3) recursief toe dan vinden we

$$I_{n+1} - I^* = -(1-K)^{n-1}(\underline{D}_1 - F) - \dots - (1-K)(\underline{D}_{n-1} - F) - (\underline{D}_n - F) \dots (4)$$

mits we uitgaan van de gewenste voorraad: $I_0 = I^*$.

Aangezien alle $\underline{D}_i$ trekkingen zijn uit dezelfde kansdichtheid met verwachting F en standaarddeviatie σ_s , kunnen we voor de variantie van het linkerlid schrijven:

$$\text{var}\{I_{n+1} - I^*\} = (1-K)^{2n-2} \text{var}(\underline{D}_1) + \dots + (1-K)^2 \text{var}(\underline{D}_n) + \text{var}(\underline{D}_n)$$

zolang K niet te veel van 1 afwijkt mag het rechterlid als een oneindig doorlopende reeks worden beschouwd.

We vinden dan

$$\text{var}\{I_{n+1} - I^*\} = \frac{\text{var}(\underline{D}_n)}{1 - (1-K)^2}$$

of:

$$\boxed{\text{var}(\underline{I}_n) = \text{var}(\underline{D}_n) \frac{1}{2K - K^2} \quad K \neq 0} \dots \dots \dots (5)$$

Uit (1) en (4) volgt gemakkelijk de spreiding in de produktie:

Immers gold:

$$\underline{P}_n - F = K(I^* - \underline{I}_n) = K \left[(1-K)^{n-1}(\underline{D}_1 - F) + \dots + (1-K)(\underline{D}_{n-1} - F) + (\underline{D}_n - F) \right] \dots \dots \dots (6)$$

Nemen we ook hier de variantie van beide leden, dan volgt geheel analoog, en onder dezelfde restrictie

$$\boxed{\text{var}(\underline{P}_n) = \text{var}(\underline{D}_n) \frac{K}{2-K} \quad K \neq 2} \dots \dots \dots (7)$$

Uit de resultaten blijkt, dat voor $K < 1$ stijging van K een verhoging van $\text{var}(\underline{P})$ daarentegen een verlaging van $\text{var}(\underline{I})$ ten gevolge heeft; dit wordt door een later voorbeeld bevestigd (pag.30).

- 32 -

Bezien we de mathematische verwachting van de linker leden van (4) resp. (6) dan kunnen we afleiden mbv. de definitie

$$E(\underline{D}_n) = F$$

dat:

$$\begin{array}{l} E(\underline{I}_n) = I^* \\ E(\underline{P}_n) = F \end{array}$$

.....(8)

Voor de verandering in produktie aan het eind van een tijdvak

$\underline{V}_n = \underline{P}_n - \underline{P}_{n-1}$ geldt nu, krachtens (7):

$$\text{var}(\underline{V}_n) = \text{var}(\underline{D}_n \left(\frac{2K}{2-K} \right)) \dots\dots\dots(9) *$$

en vanzelfsprekend

$$E(\underline{V}_n) = 0$$

.....(10)

Vaak zijn we echter geïnteresseerd in de absolute waarde van de produktiewijziging.

Gaan we ervan uit, dat de afname om F normaal verdeeld is dan kunnen we afleiden:

$$\begin{aligned} E[|V|] &= \frac{2}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty v e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} dv \\ &= \frac{2\sigma_v}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sigma_v \end{aligned}$$

$$\text{Dus: } E[|V|] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2K}{2-K}} \sigma_D$$

$$E[|V|] = 2 \left\{ \frac{K}{\pi(2-K)} \text{var}(\underline{D}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Voorbeeld

We gebruiken als afnamecijfers in successieve periodes de resultaten van aselechte trekkingen uit een gamma verdeling met $E(\underline{D}) = 38000$ en $\sigma(\underline{D}) = 19000$.

Als gewenste voorraadhoogte nemen we 70000.

Dit is tevens onze aanvangsvoorraad.

*) Deze formule is een benadering, doordat de correlatie tussen $\underline{P}_n$ en $\underline{P}_{n-1}$ wordt verwaarloosd. De benadering is toelaatbaar voor $K \approx 0$ en voor $K \approx 1$.

- 33 -

Door nu steeds (1),(2),(1) enz toe te passen leiden we achter-eenvolgens af, voor $K=1$:

$$P_1 = F + 1x(I^* - I_1) = 38000 + 1x(70000 - 70000) = 38000$$

$$I_2 = I_1 + P_1 - D_1 = 70000 + 38000 - 39000 = 69000$$

$$P_2 = 38000 + 1x(70000 - 69000) = 39000$$

⋮
enz.

Als we op deze wijze verdergaan kunnen we de resultaten als volgt in een tabel samenvatten:

n	I_n	P_n	D_n
1	70000	38000	39000
2	69000	39000	67000
3	41000	67000	17000
4	91000	17000	31000
5	77000	31000	13000
6	95000	13000	9000
7	99000	9000	37000
8	71000	37000	—

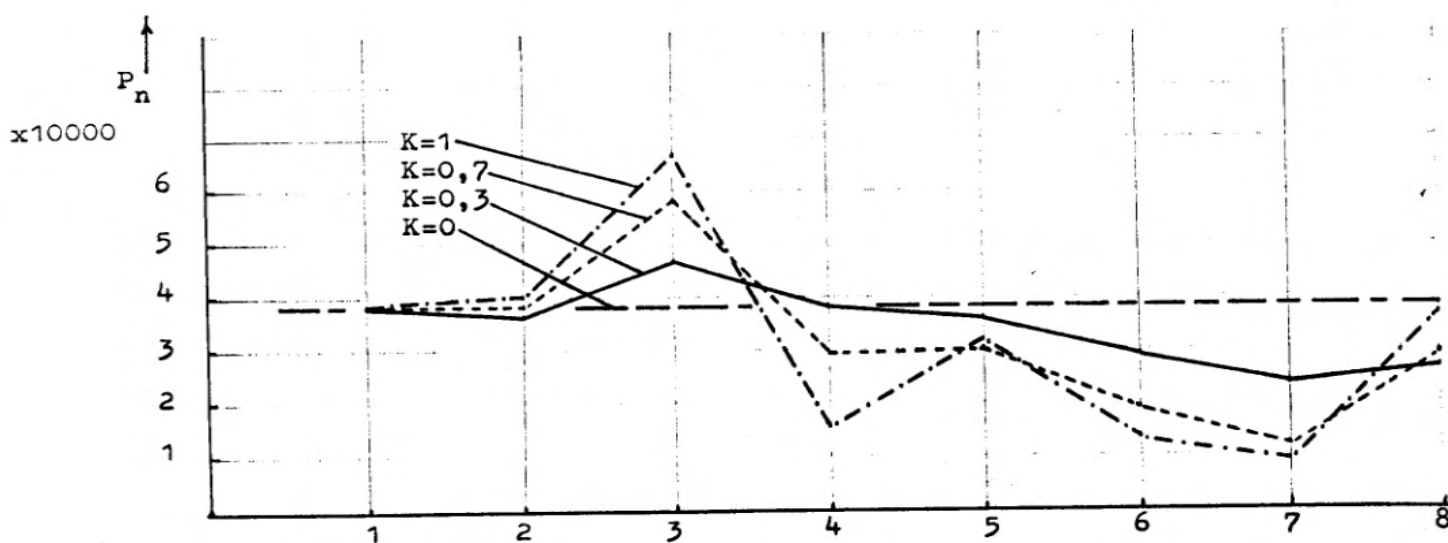
- 34 -

Bij dezelfde afnamecijfers en beginvoorwaarden vinden we, voor $K=0,7$:

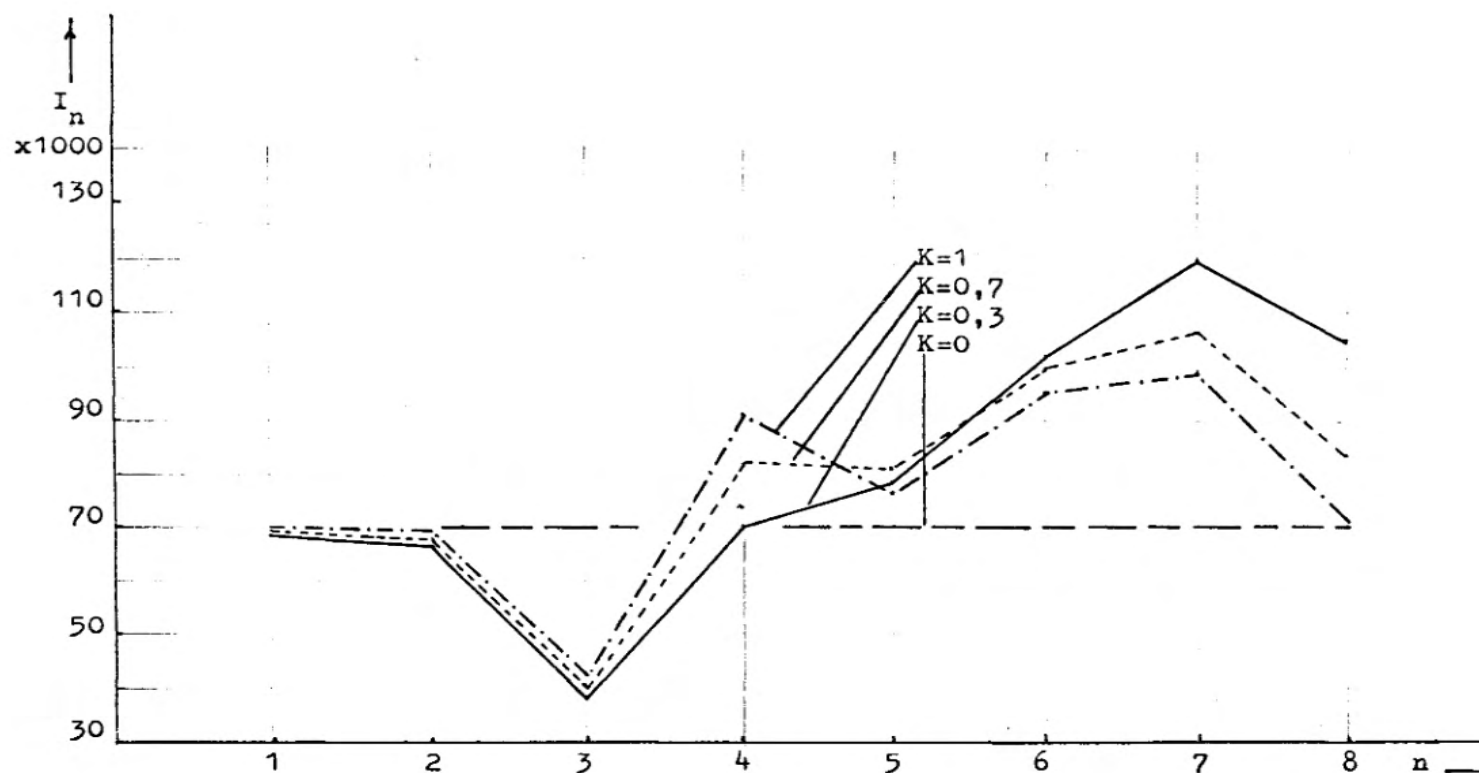
n	I_n	P_n	D_n
1	70000	38000	39000
2	69000	38700	67000
3	40700	58510	17000
4	82210	29453	31000
5	80663	30536	13000
6	98199	18261	9000
7	107460	11778	37000
8	82238	29433	—

en voor $K=0,3$

n	I_n	P_n	D_n
1	70000	38000	39000
2	69000	38300	67000
3	40300	46910	17000
4	70210	37937	31000
5	77147	35686	13000
6	99833	29050	9000
7	119883	23036	37000
8	105919	27224	—



- 35 -



De resultaten zijn in de figuren uitgezet.

Lit. [10]

Bibliografie Appendix.

- 1 Churchmann, Ackoff, Arnoff:
Introduction to Operations Research.
- 2 S. Vajda: Readings in Linear Programming
- 3 W. Feller: An Introduction to Probability theorie and Its
Applications.
- 4 M.L. Wijvekate: Verklarende Statistiek (Aula-Pocket)
- 5 Brown, Aitchison: The Lognormal Distribution
- 6 P. de Wolff: Enkele eigenschappen en toepassingen van de log-
normale verdeling.
Statistica Neerlandica 14 (1960) nr. 1.
- 7 T.L. Saaty: Elements of Queuing theory.
- 8 Cox, Smith: Queues.
- 9 Sasieni, Yaspan, Friedman: Operations Research; methods and
problems.
- 10 J.F. Magge²: Production Planning and Inventory Control.
- 11 R.N. v. Hees, W. Monhemius: Productiebesturing en Voorraadbeheer.
- 12 A.C. Aitken: Statistical Mathematics.